Q.515.98
L64m
cop.2

Lindelöf

Mémoire sur la théorie des fonctions entières.

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/memoiresurlatheo00lind

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.

TOM. XXXI. № 1. 1903

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

DE GENRE FINI

PAR

ERNST LINDELÖF.

(PRÉSENTÉ LE 16 DÉCEMBRE 1901.)

Q.S.E.4.
Lbtm
Exp. 2

PRÉFACE.

Le travail que nous publions aujourd'hui, et qui est consacré à l'étude des fonctions entières, se divise en deux parties. Dans la première nous exposons, en les complétant et en les précisant sur quelques points importants, les résultats généraux obtenus jusqu'à présent dans cette théorie [1]), nous bornant toutefois, pour la plupart des cas, aux fonctions de genre fini. Nous nous sommes constamment efforcé, dans notre exposition, de choisir les méthodes les plus naturelles et les plus élémentaires, et de présenter les raisonnements et les calculs sous une forme aussi simple que possible. Nous espérons avoir contribué par là à faciliter dans une certaine mesure l'accès de cette belle théorie, qui est certainement appelée à jouer dans l'Analyse un rôle des plus importants.

Nous nous permettrons de signaler les parties suivantes de notre exposition qui nous semblent mériter une attention particulière, soit pour les résultats établis, soit pour la simplicité des démonstrations.

A l'aide d'une inégalité tout à fait élémentaire (n° 2), qui n'est d'ailleurs que la généralisation d'une autre dont on s'est servi antérieurement pour le même but,

---

[1]) N'ayant pas l'intention d'écrire un historique complet, nous nous contenterons de citer les travaux suivants, qui marquent les progrès successifs de la théorie qui nous occupe:

H. Poincaré : *Sur les fonctions entières* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, 1883).

J. Hadamard : *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (Thèse. Paris 1892).

„ : *Étude des propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Mathématiques*, 1893).

É. Borel : *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. 20, 1897).

„ : *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, 1900).

Citons encore un théorème important de M. Schou (*Comptes rendus*, t. CXXV, 1897), ainsi qu'une thèse allemande: *Ueber die Theorie der Hadamard'schen Funktionen* etc. (Göttingen 1898), par M. v. Schaper, élève de M. Hilbert.

925678

nous arrivons à démontrer (n° 3) en quelques lignes les résultats de MM. POINCARÉ et BOREL concernant la limite supérieure du module d'un produit de facteurs primaires.

Au n° 6, nous donnons une proposition nouvelle qui constitue un complément essentiel d'un théorème de M. HADAMARD, et dont la démonstration n'est pas sans difficulté. Cette même proposition nous permet plus loin (n° 20) de généraliser notablement les résultats connus relatifs à la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement de TAYLOR.

Afin de trouver des limites inférieures pour les modules des zéros d'une fonction entière dont le module maximum croît moins vite qu'une expression donnée, nous avons eu recours au beau théorème établi par M. JENSEN [1]), théorème dont nous donnons une démonstration très simple [2]) (n° 8), en le rattachant aux principes les plus élémentaires de la théorie des fonctions analytiques.

Les considérations des n°s 12—14 servent à préciser beaucoup les résultats de MM. HADAMARD et BOREL relatifs au rapport qui existe entre la croissance d'une fonction entière et la densité de ses zéros [3]), ainsi que les propositions de M. BOREL sur les fonctions à croissance régulière.

Enfin nous développons, aux n°s 16—18, une méthode à la fois élémentaire et exacte pour étudier la croissance d'une fonction définie par une série de TAYLOR. [4])

Dans la seconde partie de notre travail, nous cherchons à préciser davantage les résultats de la première, en resserrant autant que possible les diverses inégalités que nous y avions établies, et en calculant effectivement les valeurs des constantes qu'elles renferment. Nous y arrivons dans bien des cas, soit à l'aide des expressions asymptotiques que nous a fournies la théorie de CAUCHY pour certains produits infinis, soit par une étude approfondie des inégalités tirées du théorème de M. JENSEN. Cependant le temps malheureusement trop court que nous avons pu y consacrer, ne nous a pas permis de poursuivre jusqu'au bout toutes les recherches que nous avions en vue, et pour certaines questions importantes, dont la solution définitive semble présenter des difficultés considérables, nous avons dû nous contenter de quelques indications sommaires. Nous espérons toutefois que les résultats déjà acquis par nous, et les méthodes qui nous y ont conduit, ne seront pas sans utilité pour ceux qui désirent pénétrer plus loin dans cette théorie.

---

[1]) *Acta mathematica*, t. 22.

[2]) Au moment d'achever l'impression de notre Mémoire, nous nous sommes aperçu qu'une démonstration tout à fait analogue a déjà été donnée par M. J. PETERSEN (*Acta mathematica*, t. 23).

[3]) Cf. la note de la p. 24.

[4]) Cf. la seconde note de la p. 36.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

Pages.

1. Définition du genre et de l'ordre réel d'une fonction entière 1
2. Inégalité fondamentale 2
3. Recherche d'une limite supérieure du module d'une fonction canonique 3
4. Remarques sur les séries convergentes à termes positifs décroissants 5
5. Recherche d'une limite inférieure du module d'une fonction entière de genre zéro 6
6. Théorème nouveau relatif au cas où la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho}$ converge 8
7. Extension des résultats des nos 5 et 6 aux fonctions canoniques de genre quelconque . . 10
8. Théorème de M. JENSEN 11
9. Inégalités tirées du théorème de M. JENSEN 13
10. Théorème sur la partie réelle d'une fonction entière 15

CHAPITRE II.

RELATION ENTRE LA GRANDEUR DU MODULE MAXIMUM D'UNE FONCTION ENTIÈRE ET LA DENSITÉ DE SES ZÉROS.

11. Définition de l'ordre apparent d'une fonction entière; relation entre l'ordre apparent, l'ordre réel et le genre 17
12. Extension des résultats précédents. — Inégalités diverses 20
13. Définition nouvelle plus précise de l'ordre apparent et de l'ordre réel d'une fonction entière. — Relation entre ces ordres. — Fonctions à croissance régulière 25
14. Suite des considérations sur les fonctions à croissance régulière 30

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION ENTIÈRE DONNÉE PAR SON DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

15. Recherche d'une limite supérieure des modules des coefficients, étant donnée une limite supérieure du module de la fonction 33
16. Problème inverse du précédent. — Méthodes proposées antérieurement. — Exposition d'une méthode élémentaire 34

Pages.

17. Application de la méthode précédente à un exemple particulier 38
18. Suite des applications 41
19. Relation entre l'ordre de grandeur du module maximum d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de ses coefficients 44
20. Sur la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement de Taylor 46

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE IV.

EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINS PRODUITS INFINIS.

21. Représentation de la dérivée logarithmique au moyen d'une intégrale définie 49
22. Application du théorème de Cauchy 51
23. Discussion de l'égalité fournie par le théorème de Cauchy 52
24. Expressions asymptotiques des produits considérés au n° 21 53
25. Généralisations diverses 55
26. Expressions asymptotiques de certaines intégrales définies 56

CHAPITRE V.

APPLICATION DES RÉSULTATS DU CHAPITRE PRÉCÉDENT A LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS ENTIÈRES.

27. Recherche d'une limite supérieure précise du module maximum d'une fonction entière, étant donnée une limite inférieure des modules de ses zéros 59
28. Retour sur les inégalités fournies par le théorème de M. Jensen 63
29. Suite de la discussion précédente; cas où les zéros sont assujettis à certaines inégalités 65
30. Suite de la discussion précédente; cas d'une fonction de genre 0 dont les zéros sont réels et de même signe 69
31. Résumé des résultats précédents; application à la fonction $\xi(t)$ de Riemann. — Influence des arguments des zéros sur la croissance de la fonction 71
32. Aperçus sur un problème important relatif aux fonctions à croissance régulière 74
33. Remarque sur le genre de la somme de deux fonctions entières. — Conclusions générales 77

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

1. **Définition du genre et de l'ordre réel d'une fonction entière.** — Considérons une suite indéfinie de nombres donnés

(1) $$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

différents de zéro et rangés par ordre de modules croissants, et supposons qu'il existe un nombre entier q tel que la série

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{q+1}$$

soit convergente, et soit précisément q le plus petit entier satisfaisant à cette condition, de sorte que la série

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^{q}$$

sera divergente.

D'après le théorème de WEIERSTRASS, toute fonction entière $f(x)$ admettant pour zéros les points représentés par les nombres de la suite (1), chaque zéro comptant autant de fois que le nombre correspondant figure dans cette suite, et ne s'annulant en aucun autre point, excepté peut-être l'origine, peut se mettre sous la forme

$$f(x) = e^{G(x)} \cdot x^m \prod_1^\infty \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{q}\left(\frac{x}{a_n}\right)^q} \right\},$$

ou bien, avec la notation de WEIERSTRASS,

$$f(x) = e^{G(x)} \cdot x^m \prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, q\right),$$

m désignant un entier positif ou nul et $G(x)$ une fonction entière.

Faisons encore l'hypothèse que la fonction $G(x)$ se réduise à un polynome de degré k. Alors, si p désigne le plus grand des nombres q et k, la fonction $f(x)$ est dite de *genre* p.

Si la fonction $G(x)$ est identiquement nulle, nous dirons que $f(x)$ est une fonction *canonique*.

Reprenons la suite (1) des zéros de la fonction $f(x)$. De l'hypothèse faite au début, on conclut l'existence d'un nombre ρ vérifiant la condition $q \leqq \rho \leqq q+1$, et tel que la série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\varepsilon}$$

soit convergente ou divergente, suivant que le nombre ε est positif ou négatif. Ce nombre ρ, qui indique la *densité* des zéros a, est appelé l'*ordre réel* de la fonction $f(x)$. Remarquons qu'on a toujours $\rho \leqq p+1$.

Quant à la série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho},$$

elle peut être convergente ou divergente suivant les cas. Toutefois, d'après la définition du nombre q, elle est forcément convergente si $\rho = q+1$, et divergente si $\rho = q$.

2. Inégalité fondamentale. — Nous allons établir, relativement à l'expression

$$E(u,p) = (1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}},$$

la proposition que voici:

Étant donné un nombre quelconque τ satisfaisant à la condition $p < \tau < p+1$, on peut trouver une constante positive A telle que l'inégalité

$$|E(u,p)| < e^{A|u|^\tau} \tag{2}$$

soit vérifiée pour toute valeur de u (si $p > 0$, il est permis de faire $\tau = p$).

Nous avons, pour $|u| < 1$,

$$E(u,p) = e^{\log(1-u)+u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}} = e^{-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\frac{u^{p+2}}{p+2}-\cdots},$$

d'où

$$|E(u,p)| < e^{|u|^{p+1}+|u|^{p+2}+\cdots} \leqq e^{\frac{|u|^\tau}{1-|u|}},$$

et par suite, pour $|u| \leq \frac{1}{2}$,

$$|E(u,p)| < e^{2|u|^\tau}$$

Comme le second membre croît plus vite que le module maximum du premier membre, cette inégalité aura encore lieu pour les valeurs u dont le module dépasse une certaine limite finie λ.

Enfin, nous pouvons évidemment trouver un nombre positif α assez grand pour que l'inégalité

$$|E(u,p)| < e^{\alpha|u|^\tau}$$

subsiste pour $\frac{1}{2} < |u| \leq \lambda$.

Dès lors, si nous choisissons A égal au plus grand des nombres 2 et α, l'inégalité (2) subsistera quel que soit u et notre proposition se trouve donc démontrée.

3. **Recherche d'une limite supérieure du module d'une fonction canonique.** Considérons une fonction canonique de genre p et d'ordre réel ρ:

$$f(x) = \prod_1^\infty \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\} \equiv \prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, p\right),$$

et proposons-nous de trouver une limite supérieure de son module sur le cercle $|x| = r$ (pour simplifier l'écriture, nous négligerons constamment les racines 0, qui n'ont d'ailleurs aucune influence sur les résultats).

Nous admettons d'abord que la série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho \tag{3}$$

converge. On sait que cela suppose $\rho > p$.

Appliquons l'inégalité (2) en y faisant $\tau = \rho$:

$$\left|E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)\right| < e^{A\left|\frac{x}{a_n}\right|^\rho},$$

choisissons l'entier n_1 assez grand pour qu'on ait

$$\sum_{n_1+1}^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho < \frac{\varepsilon}{2A},$$

et écrivons la fonction donnée sous la forme

$$f(x) = \prod_1^{n_1} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \cdot \prod_{n_1+1}^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, p\right).$$

Comme $\rho > p$, le module du premier produit, composé d'un nombre fini de facteurs, restera évidemment inférieur à $e^{\frac{\varepsilon}{2} r^\rho}$ à partir d'une certaine valeur r. Quant au second produit, les inégalités ci-dessus nous donnent

$$\left| \prod_{n_1+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \right| < e^{A r^\rho \sum_{n_1+1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^\rho} < e^{\frac{\varepsilon}{2} r^\rho}.$$

Donc nous aurons, pour $|x| = r$,

$$|f(x)| < e^{\varepsilon r^\rho},$$

dès que r dépassera une certaine limite.

Si la série (3) diverge, on a nécessairement $\rho < p+1$. Fixons le nombre positif ε assez petit pour qu'on ait $\rho + \frac{\varepsilon}{2} \leq p+1$, et appliquons encore l'inégalité (2), en y faisant cette fois $\tau = \rho + \frac{\varepsilon}{2}$; il vient

$$\left| E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \right| < e^{A \left| \frac{r}{a_n} \right|^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

A désignant toujours une constante positive. Comme la série $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}$ converge, nous en concluons

$$\left| \prod_{1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \right| < e^{A r^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}} \sum_{1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}},$$

et par suite

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

à partir d'une certaine valeur r. Nous avons donc démontré ce théorème:

Toute fonction canonique $f(x)$ d'ordre réel ρ vérifie, à partir d'une valeur finie de $r = |x|$, l'inégalité

$$|f(x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε donné d'avance.

Dans les cas où la série $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^\rho$ converge, $f(x)$ vérifie en outre l'inégalité

$$|f(x)| < e^{\varepsilon r^p}$$

pour r suffisamment grand.

Il s'ensuit, en particulier, qu'on aura pour toute fonction entière $f(x)$ de genre p, quelque petit que soit ε,

$$|f(x)| < e^{\varepsilon r^{p+1}},$$

dès que r dépassera une certaine limite.

4. **Remarques sur les séries convergentes à termes positifs décroissants.** Soit une suite indéfinie de nombres positifs décroissants

$$r_1 \geqq r_2 > \cdots \geqq r_n \geqq \cdots,$$

tels que la série Σr_n soit convergente. Je dis que, *quelque petit que soit le nombre positif ε, on aura $r_n < \frac{\varepsilon}{n}$ à partir d'une valeur finie de n.*

En effet, si cette proposition n'était pas vraie, il existerait un nombre positif σ tel que l'inégalité

$$r_n > \frac{\sigma}{n}$$

eût lieu pour une infinité de valeurs n. Quelque grand que fût n, on pourrait donc trouver un entier $n_1 > 2n$, tel que $r_{n_1} > \frac{\sigma}{n_1}$, et que par suite

$$\sum_{n+1}^{n_1} r_\nu \geqq (n_1 - n)\, r_{n_1} > \frac{n_1}{2} \cdot \frac{\sigma}{n_1},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n+1}^{n_1} r_\nu > \frac{\sigma}{2}.$$

Or cette conclusion est en contradiction avec l'hypothèse concernant la convergence de la série Σr_n. La proposition énoncée est donc vraie.

Voici une autre remarque qui nous sera utile. D'après la proposition que nous venons de démontrer, nous pouvons écrire

$$r_n = \frac{1}{n\,\omega(n)},$$

$\omega(n)$ tendant vers l'infini avec n. Il s'ensuit

$$r_n |\log r_n| = \frac{1}{n} \cdot \frac{\log n}{\omega(n)} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\log \omega(n)}{\omega(n)}.$$

Or, comme les séries

$$\sum \frac{1}{n\omega(n)} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n\log n}$$

sont respectivement convergente et divergente, on ne saurait avoir

$$\frac{1}{n\omega(n)} > \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{n\log n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\log n}{\omega(n)} > \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toutes les valeurs n dépassant une certaine limite. En d'autres termes, quelque petit que soit ε, l'inégalité

$$\frac{\log n}{\omega(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sera vérifiée pour une infinité de nombres entiers n. Comme d'autre part

$$\frac{\log\omega(n)}{\omega(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que n dépassera une certaine limite, nous arrivons donc au résultat suivant:

Quelque petit que soit le nombre positif ε, on aura

$$r_n |\log r_n| < \frac{\varepsilon}{n}$$

pour une infinité de valeurs de l'indice n.

5. **Recherche d'une limite inférieure du module d'une fonction entière de genre zéro.** — Étant donnée une fonction entière de genre zéro et d'ordre réel $\rho < 1$:

$$f(x) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

nous allons démontrer le théorème suivant, où r désigne, comme plus haut, le module de la variable complexe x.

Quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut trouver une infinité de cercles ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, tels que l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

soit vérifiée sur chacun d'eux.

Ce théorème est d'ailleurs vrai aussi pour $\rho = 1$; mais, comme la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ converge, le théorème plus précis que nous établirons au numéro suivant est alors applicable.

Marquons sur l'axe réel positif les points d'affixes $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|$, et portons de part et d'autre de chacun de ces points un segment de longueur 1, de sorte que la portion de l'axe réel couverte par ces segments sera au plus égale à $2n$.

Comme $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ est une série convergente à termes positifs décroissants, nous savons, d'après le numéro précédent, que le rapport $2n : |a_n|$ tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini. λ étant un nombre positif quelconque inférieur à l'unité, nous sommes donc assurés qu'il existe entre $\lambda|a_n|$ et $|a_n|$, dès que n dépassera une certaine limite, des points ne faisant partie d'aucun des segments en question. Donc *on peut trouver une valeur r aussi grande qu'on voudra, et telle qu'on ait $r - |a_n| > 1$ pour toute valeur de n.*

Ce point établi, fixons le nombre ε de sorte que $\rho + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1$, et d'ailleurs aussi petit que l'on veut, puis choisissons r comme il a été dit ci-dessus, et assez grand pour que, l'indice n' étant déterminé par la condition

$$|a_{n'}| \leq 2r < |a_{n'+1}|,$$

on ait

$$\left|\frac{1}{a_{n'}}\right|^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{n'},$$

ce qui est possible, d'après n° 4, à cause de la convergence de la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}$.

Écrivons maintenant

$$f(x) = \prod_1^{n'}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \cdot \prod_{n'+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

et cherchons une limite inférieure du module de chacun des deux produits sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Pour le premier produit, nous trouvons successivement

$$\left|\prod_1^{n'}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\right| \geq \prod_1^{n'}\left|\frac{r - |a_n|}{a_n}\right| > \prod_1^{n'}\left|\frac{1}{a_n}\right| > \left|\frac{1}{a_{n'}}\right|^{n'} \geq \left(\frac{1}{2r}\right)^{n'},$$

ou enfin, puisque $n' < |a_{n'}|^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}} \leq (2r)^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}$,

$$\left|\prod_1^{n'}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\right| > e^{-(2r)^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}\log(2r)}.$$

Pour ce qui concerne le second produit qui entre dans l'expression de $f(x)$, nous ferons observer, avec M. Hadamard, qu'on a l'inégalité

$$1 - u > e^{-2u}$$

pour $0 < u < \frac{1}{2}$. En effet, on peut écrire

$$e^{-2u} = (1-u) - u(1-2u) - \frac{(2u)^3}{3!}\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{(2u)^5}{5!}\left(1-\frac{u}{3}\right) - \cdots,$$

ét, pour les valeurs considérées de u, tous les termes de cette expression, à partir du second, sont négatifs. Comme $\rho + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1$, on aura donc *à fortiori* l'inégalité

$$1-u > e^{-2u^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

pour $0 < u < \frac{1}{2}$.

Or, on a $\left|\frac{x}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$, pour $|x| = r, n > n'$, et par suite il vient

$$\left|\prod_{n'+1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\right| \geq \prod_{n'+1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{x}{a_n}\right|\right) > e^{-2r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}\sum_{n'+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

on encore, en posant $2\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}} = A$,

$$\left|\prod_{n'+1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\right| > e^{-Ar^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Ainsi donc, nous trouvons, pour $|x| = r$,

$$|f(x)| > e^{-(2^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}\log 2r + A)r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Mais on aura évidemment

$$2^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}\log 2r + A < r^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

dès que r dépassera une certaine limite. Par suite il vient

$$|f(x)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

et, d'après le raisonnement qui précède, nous pouvons affirmer qu'il existe des valeurs r aussi grandes qu'on voudra, pour lesquelles cette inégalité est vérifiée. Le théorème annoncé au début de ce numéro se trouve donc démontré.

6. **Théorème nouveau relatif au cas où la série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho}$ converge.** — Nous allons compléter le théorème précédent en démontrant cette nouvelle proposition:

$f(x)$ étant une fonction entière de genre zéro et d'ordre réel ρ, et ε un nombre positif arbitrairement petit; si la série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho}$ converge, on peut trouver une infinité

de cercles ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, tels que l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon r^\rho},$$

soit vérifiée sur chacun d'eux.

k étant un nombre positif > 2, choisissons l'entier n' de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\log|a_{n'}|}{|a_{n'}|^\rho} < \frac{\varepsilon}{2k} \cdot \frac{1}{n'}, \tag{4}$$

et en même temps

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho < \frac{\varepsilon}{4}; \tag{5}$$

ce qui est possible d'une infinité de manières, en vertu de la remarque faite p. 6 et de l'hypothèse concernant la convergence de la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho$.

Le raisonnement du numéro précédent nous fait voir que, si le nombre n' a été choisi suffisamment grand, on peut trouver un nombre r compris dans l'intervalle

$$\frac{|a_{n'}|}{k} < r < \frac{|a_{n'}|}{2},$$

et vérifiant la condition

$$|r - |a_n|| > 1$$

pour toute valeur de l'indice n.

Cela posé, écrivons encore

$$f(x) = \prod_1^{n'}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \cdot \prod_{n'+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right),$$

et cherchons une limite inférieure, pour $|x| = r$, du module de chacun des deux produits du second membre.

Comme $\left|\frac{x}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$ pour $|x| = r$, $n > n'$, on obtient, comme plus haut,

$$\left|\prod_{n'+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\right| > e^{-2\sum_{n'+1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_n}\right|^\rho} \equiv e^{-2r^\rho\sum_{n'+1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho},$$

ou bien, en vertu de l'hypothèse (5),

$$\left|\prod_{n'+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2}r^\rho}.$$

Quant au premier produit, on trouve d'abord, comme au n° 5,

$$\left|\prod_1^{n'}\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)\right| \geq \prod_1^{n'}\left|\frac{r - |a_n|}{a_n}\right| > \left|\frac{1}{a_{n'}}\right|^{n'} \equiv e^{-n'\log|a_{n'}|}.$$

Or, d'après (4), on a $n' \log |a_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2k} |a_{n'}|^\rho$, d'où il suit

$$\left| \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2k} |a_{n'}|^\rho}$$

Comme $|a_{n'}| < kr$, le second membre de cette inégalité est supérieur à $e^{-\frac{\varepsilon}{2k}(kr)^\rho}$, et par suite *à fortiori* supérieur à $e^{-\frac{\varepsilon}{2} r^\rho}$, puisque $k^\rho \leq k$, de sorte qu'il vient enfin

$$\left| \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2} r^\rho}.$$

Des limites que nous venons de trouver pour les modules des deux produits dont se compose $f(x)$, il suit

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon r^\rho} \quad \text{pour } |x| = r,$$

et notre raisonnement prouve qu'il existe une infinité de valeurs r indéfiniment croissantes, pour lesquelles cette inégalité a lieu.

Notre théorème est donc démontré. Il est d'ailleurs évident que le théorème du numéro précédent en est une conséquence immédiate.

7. **Extension des résultats des n^os^ 5 et 6 aux fonctions canoniques de genre quelconque.** — A l'exemple de M. BOREL, nous allons nous servir de la remarque suivante, qui est due à LAGUERRE.

Soit une fonction canonique de genre p et d'ordre réel ρ:

$$f(x) = \prod_1^\infty \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\},$$

et désignons par ω une racine primitive $(p+1)^{ième}$ de l'unité. *Le produit*

$$F(x) = f(x) f(\omega x) f(\omega^2 x) \cdots f(\omega^p x) \equiv \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^{p+1}}{a_n^{p+1}}\right),$$

considéré comme fonction de x^{p+1}, est une fonction entière de genre 0 et d'ordre réel $\frac{\rho}{p+1}$.

Dès lors, d'après les théorèmes des deux derniers numéros, on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a

$$|F(x)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{ou} \quad |F(x)| > e^{-\varepsilon r^\rho}$$

suivant que la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho$ est divergente ou convergente. D'autre part, le résultat du n° 3 nous apprend que, suivant que l'un ou l'autre de ces cas se présente, on a

$$|f(\omega^k x)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \text{ ou } < e^{\varepsilon r^\rho} \qquad (k=1,2,\cdots,p),$$

et par suite

$$|f(\omega x)\cdots f(\omega^p x)| < e^{p r^{\rho+\varepsilon}} \text{ ou } < e^{\varepsilon p r^\rho},$$

si on prend r suffisamment grand.

On en conclut que l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-(p+1) r^{\rho+\varepsilon}} \text{ ou bien } |f(x)| > e^{-\varepsilon (p+1) r^\rho}$$

est vérifiée sur tous ceux des cercles envisagés dont les rayons dépassent une certaine limite, d'où le théorème suivant:

Étant donnée une fonction canonique $f(x)$ de genre p et d'ordre réel ρ, on peut trouver une infinité de cercles ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels l'inégalité

$$|f(x)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

est vérifiée, ε désignant un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on voudra.

Dans les cas où la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho$ converge, l'inégalité plus précise

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon r^\rho}$$

sera également vérifiée sur une infinité de cercles dont les rayons croissent indéfiniment.

8. **Théorème de M. Jensen.** — Soit $f(x)$ une fonction entière quelconque, de genre fini ou non, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, ses zéros, rangés par ordre de modules croissants, R son module et Φ son argument, de sorte que $f(x) = Re^{i\Phi}$. Soit d'autre part C un cercle ayant l'origine comme centre, le rayon r, et dont la circonférence ne passe par aucun des points a.

D'apres une proposition élémentaire bien connue, le nombre n des zéros de $f(x)$ compris dans le cercle C est égal au produit par $\frac{1}{2\pi}$ de l'accroissement que prend l'argument Φ, lorsque la variable x décrit la circonférence de ce cercle en sens direct. On a donc, en posant $x = re^{i\varphi}$,

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\, d\varphi.$$

Or, $\log R$ et $i\Phi$ étant respectivement les parties réelle et imaginaire de la fonction analytique $\log f(x)$, on a la relation

$$\frac{\partial \log R}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

et l'égalité précédente peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{n}{r}=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log R}{\partial r}\,d\varphi\,.$$

D'après le raisonnement qui précède, cette égalité subsiste pour $|a_n|<r<|a_{n+1}|$. Nous pouvons donc intégrer par rapport à r, et, en posant

$$F(r)=\frac{1}{2\pi}\int_C \log R\,d\varphi\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\,,$$

et désignant par C_n la constante d'intégration, nous obtenons ainsi

$$F(r)=n\log r+C_n, \tag{6}$$

formule qui reste valable pour $|a_n|<r<|a_{n+1}|$.

Il est facile d'évaluer la valeur de la constante C_n. Soit en effet $a_{n-\nu}$ le dernier zéro dont le module est inférieur à $|a_n|$, de sorte qu'on a $|a_n|=|a_{n-1}|=\cdots=|a_{n-\nu+1}|>|a_{n-\nu}|$. Le raisonnement que nous venons de faire nous donne, dans l'intervalle $|a_{n-\nu}|<r<|a_n|$,

$$F(r)=(n-\nu)\log r+C_{n-\nu},$$

$C_{n-\nu}$ désignant une nouvelle constante. Or, $\log R$ n'ayant que des infinis d'ordre logarithmique, $F(r)$ est une fonction continue de r. Les deux expressions que nous venons de trouver pour $F(r)$ doivent donc coïncider lorsqu'on y fait $r=|a_n|$, ce qui nous donne, pour les constantes C, la formule de récurrence

$$C_n=C_{n-\nu}-\nu\log|a_n|\equiv C_{n-\nu}-\log|a_{n-\nu+1}\,a_{n-\nu+2}\cdots a_n|.$$

Pour embrasser tous les cas, supposons que l'origine soit pour $f(x)$ un zéro d'ordre m, de sorte que le développement de cette fonction commence par le terme cx^m, c désignant une constante différente de zéro Posons d'ailleurs

$$f(x)=cx^m f_1(x)\qquad (f_1(0)=1).$$

a_{m+1} étant le premier zéro de $f(x)$ qui n'est pas nul, le raisonnement qui précède nous donne, pour $r<|a_{m+1}|$,

$$F(r)=m\log r+C_m,$$

la constante C_m étant liée à C_n par la relation

$$C_n=C_m-\log|a_{m+1}\,a_{m+2}\cdots a_n|.$$

Mais, d'autre part, nous pouvons écrire

$$F(r)=m\log r+\log|c|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_1(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

et, par la comparaison de ces deux expressions de $F(r)$, nous trouvons

$$C_m - \log|c| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_1(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

L'égalité $f_1(0)=1$ montre que l'expression du second membre tend vers zéro en même temps que r. Cette expression gardant une valeur constante pour $r<|a_{m+1}|$, elle est donc identiquement nulle, d'où résulte $C_m=\log|c|$, et par suite

$$C_n = \log|c| - \log|a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_n|.$$

L'égalité (6) devient donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log\left|\frac{cr^n}{a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_n}\right|, \tag{7}$$

formule valable pour toute valeur de r, à condition qu'on choisisse toujours l'entier n de sorte que $|a_n|\leq r\leq|a_{n+1}|$.

C'est là le beau théorème trouvé par M. Jensen [1]), et que nous avons ainsi rattaché aux plus élémentaires principes de la théorie des fonctions.

Dans la suite, nous supposerons en général, sans le dire à chaque fois, que la fonction $f(x)$ ne s'annule pas à l'origine, et que sa valeur y est égale à l'unité. C'est là une hypothèse servant uniquement à simplifier la notation, et qui n'a aucune influence sur les résultats, ce dont on se rendra facilement compte dans chaque cas donné. En l'admettant, la formule de M. Jensen s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log\left|\frac{r^n}{a_1a_2\cdots a_n}\right|. \tag{7}'$$

9. **Inégalités tirées du théorème de M. Jensen.** Convenons de désigner, avec M. Borel, par $M(r)$ le maximum du module de la fonction $f(x)$ sur le cercle $|x|=r$, et admettons que $f(0)=1$. De la formule (7)' nous tirons immédiatement l'inégalité

$$\frac{r^n}{|a_1a_2\cdots a_n|} < M(r), \tag{8}$$

en supposant d'abord que r vérifie la condition $|a_n|\leq r\leq|a_{n+1}|$.

Mais il est facile de voir que cette inégalité subsiste quelle que soit la valeur de r. En effet, si r est par exemple compris dans l'intervalle $|a_{n+k}|<r\leq|a_{n+k+1}|$, on aura d'abord l'inégalité

---

[1]) J.-L.-W.-V. Jensen: *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta Mathematica Tom. 22. En modifiant quelque peu la démonstration du texte, on établit de même le théorème de M. Jensen relatif aux fonctions méromorphes.

$$\frac{r^{n+k}}{|a_1 a_2 \cdots a_{n+k}|} < M(r).$$

Or, en écrivant le premier membre sous la forme

$$\frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} \cdot \left|\frac{r}{a_{n+1}}\right| \cdots \left|\frac{r}{a_{n+k}}\right|,$$

on voit qu'il est supérieur ou égal au premier membre de l'inégalité (8). Celle-ci reste donc valable pour $r > |a_{n+1}|$ et, par un raisonnement tout à fait analogue, on conclut qu'elle subsiste aussi pour $r < |a_n|$. Donc:

Étant donnée une fonction entière quelconque dont la valeur à l'origine est égale à l'unité; si $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, désignent les zéros de cette fonction, rangés par ordre de modules croissants, et $M(r)$ le maximum de son module sur le cercle $|x| = r$, l'inégalité

$$\frac{1}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} < \frac{M(r)}{r^n} \tag{9}$$

est vérifiée pour toutes les valeurs de r et de l'indice n.

D'après une propriété bien connue des fonctions analytiques, $M(r)$ croît constamment avec r. Supposons qu'on ait

$$M(r) < e^{V(r)},$$

$V(r)$ étant une fonction croissante, telle que la fonction $\psi(r) = r V'(r)$ soit également croissante, et admettons, pour plus de simplicité, que $V(0) = 0$.

Cherchons le minimum de l'expression

$$\frac{e^{V(r)}}{r^n}.$$

En égalant à zéro sa dérivée par rapport à r, on trouve la condition

$$r V'(r) = n, \quad \text{ou bien} \quad \psi(r) = n,$$

d'où l'on tire, en désignant par φ la fonction inverse de la fonction ψ,

$$r = \varphi(n), \qquad V(r) = \int_0^r \frac{\psi(r)}{r}\, dr = \int_0^n \frac{n\,\varphi'(n)}{\varphi(n)}\, dn,$$

de sorte que le minimum cherché devient

$$\frac{e^{\int_0^n \frac{n\,\varphi'(n)}{\varphi(n)}\, dn}}{[\varphi(n)]^n}.$$

Nous obtenons donc le résultat suivant (en supposant toujours $f(0) = 1$):

Si, pour toutes les valeurs de r, $M(r)$ vérifie la condition

$$M(r) \leq e^{V(r)}, \tag{10}$$

$V(r)$ et $rV'(r) \equiv \psi(r)$ étant des fonctions continues et croissantes, et $V(0) = 0$, on a, pour toute valeur de l'indice n, l'inégalité

$$\frac{1}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} < \frac{e^{\int_0^n \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} dn}}{[\varphi(n)]^n} \tag{11}$$

et par suite, à plus forte raison, l'inégalité

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{e^{\frac{1}{n}\int_0^n \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} dn}}{\varphi(n)}. \tag{12}$$

Et nous pouvons évidemment ajouter:

Si la condition (10) *n'est vérifiée qu'à partir d'une certaine valeur de r, les inégalités* (11) *et* (12) *subsisteront à partir d'un certain indice n.*

Remarquons enfin que, si $V(0)$ n'est pas égal à zéro, ou si les fonctions $V(r)$ et $\psi(r)$ ne sont continues et croissantes qu'à partir d'une certaine valeur de r, cas qui se présentera dans la suite, on doit prendre comme limite inférieure de l'intégrale figurant dans les inégalités précédentes une constante positive convenablement choisie, et en même temps multiplier le second membre de (11) par un certain facteur numérique, et par suite le second membre de (12) par un facteur de la forme $1 + \varepsilon(n)$, $\varepsilon(n)$ tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

10. **Théorème sur la partie réelle d'une fonction entière.** — Nous terminerons ce chapitre en rappelant la démonstration du théorème suivant de M. HADAMARD:

Soit $f(x)$ une fonction entière et U sa partie réelle: s'il existe une infinité de cercles, ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels une inégalité de la forme

$$U < Ar^{\lambda}$$

est vérifiée, A désignant une constante positive et λ un entier positif ou nul, la fonction $f(x)$ se réduit à un polynôme de degré inférieur ou égal à λ.

Si la condition précédente est vérifiée quelque petite que soit la constante A, $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur à λ.

Soit

$$f(x) = \sum_0^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

les α et β étant réels. Si l'on pose $x = re^{i\varphi}$, la partie réelle de $f(x)$ s'écrit

$$U = \alpha_0 + \sum_1^\infty r^n (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi),$$

d'où l'on tire, pour $n > 0$,

$$\int_0^{2\pi} U \cos n\varphi \, d\varphi = \pi r^n \alpha_n, \quad \int_0^{2\pi} U \sin n\varphi \, d\varphi = -\pi r^n \beta_n,$$

et par suite

$$\pi r^n c_n = \int_0^{2\pi} U e^{-ni\varphi} \, d\varphi,$$

et, pour $n = 0$,

$$2\pi \alpha_0 = \int_0^{2\pi} U \, d\varphi.$$

Il s'ensuit

$$\pi r^n |c_n| < \int_0^{2\pi} |U| \, d\varphi,$$

et, en ajoutant la dernière égalité,

$$\pi r^n |c_n| + 2\pi \alpha_0 < \int_0^{2\pi} (U + |U|) \, d\varphi.$$

Or $U + |U|$ est égal à $2U$ ou à 0, suivant que U est positif ou négatif. En vertu de notre hypothèse, il vient donc, pour $n = \lambda + k$,

$$\pi r^{\lambda+k} |c_{\lambda+k}| + 2\pi \alpha_0 < 4\pi A r^\lambda,$$

ou bien

$$|c_{\lambda+k}| < \frac{2|\alpha_0|}{r^{\lambda+k}} + \frac{4A}{r^k},$$

inégalité qui sera vérifiée sur chacun des cercles dont il est question dans le théorème ci-dessus. Comme le second membre, dès que $k > 0$, tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini, on en conclut que les coefficients $c_{\lambda+1}, c_{\lambda+2}, \cdots$ sont tous nuls, et que par suite $f(x)$ se réduit bien à un polynôme de degré inférieur ou égal à λ, comme le dit le théorème.

La dernière partie de ce théorème se démontre de même en égalant, dans l'inégalité ci-dessus, le nombre k à zéro.

Il n'est guère nécessaire d'ajouter, que le théorème que nous venons de démontrer s'applique aussi bien à la partie imaginaire d'une fonction entière qu'à la partie réelle.

CHAPITRE II.

Relation entre la grandeur du module maximum d'une fonction entière et la densité de ses zéros.

11. **Définition de l'ordre apparent d'une fonction entière; relation entre l'ordre apparent, l'ordre réel et le genre.** — $f(x)$ étant une fonction entière quelconque de genre p, et $M(r)$ désignant le maximum de son module sur le cercle $|x| = r$, nous savons, d'après la remarque qui termine n° 3, que l'inégalité

$$M(r) < e^{\varepsilon r^{p+1}},$$

et par suite, à plus forte raison, l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{p+1}}$$

est vérifiée dès que la valeur de r dépassera une certaine limite finie. Nous en concluons, pour toute fonction donnée de genre fini, l'existence d'un nombre μ répondant à la condition suivante:

Quelque petit que soit le nombre positif ε, l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\mu+\varepsilon}} \tag{13}$$

est vérifiée à partir d'une valeur finie de r, et l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\mu-\varepsilon}} \tag{14}$$

pour des valeurs r dépassant toute limite donnée.

A l'exemple de M. Borel, nous appellerons ce nombre μ l'*ordre apparent* de la fonction considérée. Parfois nous dirons aussi que $M(r)$ *est d'ordre* $e^{r^{\mu}}$.

Le problème fondamental qu'il s'agit de résoudre se pose ainsi:

Étant donnée une fonction entière $f(x)$ dont on suppose l'ordre apparent égal à μ, que peut-on dire de son ordre réel et de son genre?

On peut évidemment supposer $f(0) = 1$ sans nuire à la généralité. En effet, si cette hypothèse n'est pas réalisée et si cx^m est le premier terme du développe-

ment de $f(x)$ suivant les puissances de la variable x, on peut écrire $f(x) = cx^m f_1(x)$, la fonction $f_1(x)$ étant d'ordre apparent μ et $f_1(0) = 1$.

Nous pouvons donc appliquer le dernier théorème du n° 9, en y faisant $V(r) = r^{\mu+\varepsilon}$. En gardant la notation de ce numéro, nous trouvons successivement

$$\psi(r) = (\mu+\varepsilon)\, r^{\mu+\varepsilon}, \quad \varphi(n) = \left(\frac{n}{\mu+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu+\varepsilon}}, \quad \frac{1}{n}\int_0^n \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)}\, dn = \frac{1}{\mu+\varepsilon},$$

et par suite, d'après (12),

$$\frac{1}{|a_n|} < \left[\frac{e(\mu+\varepsilon)}{n}\right]^{\frac{1}{\mu+\varepsilon}},$$

inégalité qui subsistera pour n suffisamment grand, quelque petit qu'on ait donné ε. Donc la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\mu+\varepsilon}$ converge dès que ε est positif, d'où cette première conclusion:

L'ordre réel d'une fonction entière ne saurait dépasser son ordre apparent.

Dès lors, la fonction considérée $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = e^{G(x)} \prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, q\right), \tag{15}$$

$G(x)$ étant une fonction entière et q un nombre entier $\leqq \mu$, ce qui résulte des inégalités $q \leqq \rho$, $\rho \leqq \mu$.

Appliquons maintenant le théorème du n° 7. Il nous apprend l'existence d'une infinité de cercles ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels est vérifiée l'inégalité

$$\left|\prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, q\right)\right| > e^{-r^{\mu+\varepsilon}}$$

Comme d'autre part, d'après l'hypothèse,

$$|f(x)| < e^{r^{\mu+\varepsilon}}$$

dès que r est supérieur à une certaine limite, l'égalité (15) nous donne donc, sur tous ceux des cercles envisagés dont les rayons dépassent cette même limite,

$$|e^{G(x)}| < e^{2r^{\mu+\varepsilon}},$$

ou bien

$$\text{partie réelle de } G(x) < 2\, r^{\mu+\varepsilon}.$$

Comme ce raisonnement s'applique quelque petit que soit le nombre positif ε, le théorème du n° 10 nous fournit donc ce nouveau résultat:

La fonction $G(x)$ se réduit à un polynôme de degré $k < \mu$.

Pour pousser plus loin la discussion, nous devons distinguer deux cas:

1:o *Le nombre μ n'est pas entier.* — D'après ce que nous venons de dire, le degré k du polynôme $G(x)$ est inférieur à μ. Quant à l'ordre réel ρ, je dis qu'il est égal à μ. En effet, nous avons montré plus haut qu'on a toujours $\rho \leq \mu$. Mais si ρ était inférieur à μ, on pourrait conclure du théorème du n° 3, en désignant par $\mu - \sigma$ un nombre inférieur à μ mais supérieur à ρ et à k, que l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\mu-\sigma}}$$

subsiste à partir d'une valeur finie de r, ce qui est contraire à l'hypothèse (14). Donc on a bien $\rho = \mu$, et par suite, le genre p est égal au nombre entier qui précède immédiatement le nombre μ.

Inversement, toute fonction entière (15) telle que $\rho = \mu$, $k < \mu$, est bien d'ordre apparent μ. Cet ordre, en effet, ne saurait être supérieur à ρ, à cause du théorème du n° 3, ni inférieur à ρ, en vertu du premier résultat établi ci-dessus.

2:o *μ est un nombre entier.* — L'un des nombres k et ρ doit être égal à μ, sans quoi on se trouverait de nouveau en contradiction avec l'hypothèse (14). Si $k = \mu$, ρ peut avoir une valeur quelconque $\leq \mu$. En effet, il suit du théorème du n° 3 que, pour ces valeurs de k et de ρ, l'ordre apparent de la fonction (15) n'est pas supérieur à μ, et d'autre part on peut conclure des propriétés de la fonction exponentielle et du théorème du n° 7 ou (dans le cas où $\rho = \mu$) de la première proposition établie ci-dessus, que cet ordre n'est pas davantage inférieur à μ. — Dans ce cas le genre p est égal à μ.

Si $k < \mu$, on a nécessairement $\rho = \mu$. D'ailleurs on voit, par le même raisonnement que dans l'hypothèse 1:o, qu'une fonction entière (15) pour laquelle ces conditions sont remplies, est bien d'ordre apparent μ. — Quant au genre p, il y a dans ce cas indétermination. En effet, on aura $p = \mu - 1$ ou $p = \mu$, suivant que la série $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho}$ est convergente ou divergente.

Si $f(x)$ est de genre $\mu - 1$, l'inégalité

$$M(r) < e^{\varepsilon r^{\mu}},$$

comme nous l'avons déjà dit, subsistera pour r suffisamment grand, quelque petit que soit ε, tandis qu'on aura d'autre part

$$M(r) > e^{r^{\mu-\varepsilon}}$$

pour une infinité de valeurs r indéfiniment croissantes, puisque la fonction est supposée d'ordre apparent μ. Nous exprimerons ce fait brièvement en disant que *$M(r)$ est d'ordre $e^{\varepsilon r^{\mu}}$.*

Mais, comme l'a fait remarquer M. POINCARÉ, et comme nous le verrons dans la seconde partie de ce Mémoire, il existe des fonctions entières de genre μ pour lesquelles $M(r)$ est également d'ordre $e^{\varepsilon r^{\mu}}$.

On voit donc que le cas d'indétermination dont il a été question plus haut, ne se présente que lorsque $M(r)$ est d'ordre $e^{\varepsilon r^{\mu}}$, mais que, si cette dernière condition est remplie, l'indétermination est bien réelle.

Résumons les résultats de notre discussion:

Étant donnée une fonction entière d'ordre apparent μ; si μ n'est pas un nombre entier, l'ordre réel ρ de la fonction est égal à μ et le genre p égal à l'entier immédiatement inférieur à μ.

Si μ est un nombre entier, le genre p est égal à μ toutes les fois que $M(r)$ n'est pas d'ordre $e^{\varepsilon r^{\mu}}$; mais, si $M(r)$ est d'ordre $e^{\varepsilon r^{\mu}}$, il y a indétermination relativement au genre, qui, suivant les cas, peut être égal à μ ou égal à $\mu - 1$.

12. **Extension des résultats précédents. — Inégalités diverses.** — Le théorème que nous venons de démontrer renferme tous les résultats de MM. POINCARÉ, HADAMARD et BOREL relatifs au rapport qui existe entre l'ordre de grandeur du module maximum $M(r)$ d'une fonction entière et la densité de ses zéros. Nous allons voir qu'on peut notablement préciser ces résultats, sans invoquer d'autres considérations que celles du premier Chapitre, et à cet effet nous commençons par établir certaines inégalités.

En reprenant les raisonnements et la notation du n° 9, supposons d'abord qu'à partir d'une certaine valeur de r, $M(r)$ vérifie la condition

$$M(r) < e^{V(r)},$$

où

$$V(r) = A\, r^{\rho} (\log r)^{\alpha_1} (\log^{(2)} r)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu},$$

A désignant une constante positive, et cherchons ce que devient l'inégalité (12).

Pour éviter des redites incessantes, nous allons introduire dès maintenant une notation dont nous aurons à faire dans la suite un usage continuel.

x étant une quantité positive variable, continue ou non, mais pouvant prendre des valeurs aussi grandes qu'on voudra, nous désignerons indifféremment par $\varepsilon(x)$ toute fonction de x qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Si x est une variable continue, $\varepsilon(x)$ désignera une fonction continue.

Cela posé, en prenant la dérivée logarithmique de la fonction $V(r)$, on trouve

$$\frac{r V'(r)}{V(r)} = \frac{\psi(r)}{V(r)} = \rho + \frac{\alpha_1}{\log r} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{\log r \cdots \log^{(\nu)} r} = \rho\,(1 + \varepsilon(r)),$$

d'où l'on tire

$$\psi(r) = \rho V(r)(1+\varepsilon(r)) = (1+\varepsilon(r)) A\rho r^{\rho} (\log r)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu},$$

et en différentiant encore une fois,

$$\psi'(r) = \rho V'(r)(1+\varepsilon(r)) \equiv \frac{\rho\psi(r)}{r}(1+\varepsilon(r)).$$

Ces expressions montrent que $V(r)$ et $\psi(r)$ sont bien des fonctions croissantes à partir d'une certaine valeur r, comme l'exige le théorème de la page 15.

Posons maintenant $\psi(r) = n$, et résolvons cette équation par rapport à r. En prenant les logarithmes des deux membres on trouve successivement

$$\log n = \rho \log r (1+\varepsilon(r)), \quad \log^{(2)} n = \log^{(2)} r (1+\varepsilon(r)), \cdots,$$

d'où l'on tire inversement

$$\log r = \frac{1}{\rho}\log n (1+\varepsilon(n)), \quad \log^{(2)} r = \log^{(2)} n (1+\varepsilon(n)), \cdots$$

Par suite, l'équation dont il s'agit nous donne pour r l'expression

$$r = (1+\varepsilon(n))\left[\frac{\rho^{\alpha_1 - 1}}{A} n (\log n)^{-\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{-\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}} \equiv \varphi(n).$$

De l'expression de $\psi'(r)$ on tire ensuite

$$\frac{\psi(r)}{r\psi'(r)} \equiv \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} \equiv \frac{1+\varepsilon(n)}{\rho},$$

et par conséquent, en choisissant convenablement la limite inférieure de l'intégrale,

$$e^{\frac{1}{n}\int^n \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} dn} = e^{\frac{1+\varepsilon(n)}{\rho}} = (1+\varepsilon(n)) e^{\frac{1}{\rho}}.$$

Donc, en appliquant le dernier théorème du n° 9, nous sommes conduits au résultat suivant:

Si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière satisfait à la condition

$$M(r) < e^{A r^{\rho} (\log r)^{\alpha_1} (\log^{(2)} r)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu}} \tag{16}$$

à partir d'une certaine valeur de r, le module $|a_n|$ du $n^{ième}$ zéro de la fonction vérifie l'inégalité

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho^{\alpha_1 - 1}}{Ae} n (\log n)^{-\alpha_1} (\log^{(2)} n)^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{-\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{17}$$

pour n suffisamment grand, quelque petit qu'on ait donné le nombre positif ε.

Si nous avons tant insisté sur les simples calculs qui précèdent, c'est uniquement pour n'avoir pas besoin d'y revenir lorsque dans la suite nous aurons affaire à des questions analogues.

Supposons maintenant, inversement, que les zéros a vérifient pour $n \geq n_0$ l'inégalité

$$|a_n| > \left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{18}$$

ρ *n'étant pas un nombre entier*, et cherchons d'abord une limite supérieure du module du produit fini

$$\prod_{n_0}^{n'} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \qquad (p < \rho < p+1).$$

Choisissons un nombre τ vérifiant la condition $p < \tau < \rho$. L'inégalité fondamentale du n° 2 nous donne

$$\left|\prod_{n_0}^{n'} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)\right| < e^{\text{const. } r^\tau \sum_{n_0}^{n'} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\tau},$$

et d'autre part nous avons, en vertu de l'hypothèse (18),

$$\sum_{n_0}^{n'} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\tau < \sum_{n_0}^{n'} \left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{-\frac{\tau}{\rho}}.$$

Le terme général de cette dernière somme est une fonction décroissante de n, pour n supérieur à une certaine limite, et comme $-\frac{\tau}{\rho} > -1$, l'intégrale de ce terme tend vers l'infini avec n. Nous en concluons, par un raisonnement bien connu de la théorie des séries, que la valeur de la somme en question est égale à

$$(1 + \varepsilon(n')) \int_{n_0}^{n'} \left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{-\frac{\tau}{\rho}} dn.$$

D'autre part, comme

$$\left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{-\frac{\tau}{\rho}} = (1 + \varepsilon(n)) \frac{d}{dn}\left\{\frac{\rho}{\rho - \tau} n\left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{-\frac{\tau}{\rho}}\right\},$$

cette dernière expression équivaut à

$$(1 + \varepsilon(n')) \frac{\rho}{\rho - \tau} n'\left[n'(\log n')^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n')^{\alpha_\nu}\right]^{-\frac{\tau}{\rho}}.$$

Donc, en posant

$$r' = \left[n'(\log n')^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n')^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{19}$$

d'où il suit inversement

$$n' = \frac{1 + \varepsilon(r')}{\rho^{\alpha_1}} r'^{\rho} (\log r')^{-\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} r')^{-\alpha_\nu},$$

nous trouvons enfin pour le produit considéré une inégalité de la forme

$$\left|\prod_{n_0}^{n'} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)\right| < e^{\text{const. } r^{\tau}\left[r'^{\rho-\tau}(\log r')^{-a_1}\cdots(\log^{(\nu)} r')^{-a_\nu}\right]}. \tag{20}$$

Cherchons de même une limite supérieure du module du produit

$$\prod_{n'}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right),$$

en supposant toujours remplie la condition (18). En choisissant cette fois un nombre τ' vérifiant la condition $\rho < \tau' < p+1$, et raisonnant comme ci-dessus, nous trouvons successivement

$$\left|\prod_{n'}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)\right| < e^{\text{const. } r^{\tau'}\sum_{n'}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau'}},$$

$$\sum_{n'}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\tau'} < \sum_{n'}^{\infty}\left[n(\log n)^{a_1}\cdots(\log^{(\nu)} n)^{a_\nu}\right]^{-\frac{\tau'}{\rho}},$$

cette dernière expression étant égale à

$$(1+\varepsilon(n'))\int_{n'}^{\infty}\left[n(\log n)^{a_1}\cdots(\log^{(\nu)} n)^{a_\nu}\right]^{-\frac{\tau'}{\rho}} dn,$$

ou encore à

$$(1+\varepsilon(n'))\frac{\rho}{\tau'-\rho}n'\left[n'(\log n')^{a_1}\cdots(\log^{(\nu)} n')^{a_\nu}\right]^{-\frac{\tau'}{\rho}}.$$

En usant encore de la notation (19), nous arrivons donc à cette inégalité:

$$\left|\prod_{n'}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)\right| < e^{\text{const. } r^{\tau'}\left[r'^{\rho-\tau'}(\log r')^{-a_1}\cdots(\log^{(\nu)} r')^{-a_\nu}\right]}. \tag{21}$$

Nous devons faire remarquer que, d'après notre raisonnement, les facteurs constants figurant dans l'exposant de e aux seconds membres des inégalités (20) et (21), peuvent être choisis de telle manière, que ces inégalités subsistent quelle que soit la valeur de n' ($> n_0$), pourvu qu'on détermine toujours r' par l'égalité (19).

Soit maintenant une fonction entière de genre p

$$f(x) = e^{G(x)}\prod_{1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right),$$

dont les zéros, pour $n \geq n_0$, vérifient l'inégalité (18), le nombre ρ étant assujetti à la condition $p < \rho < p+1$.

Nous nous proposons de trouver une limite supérieure du module maximum $M(r)$ de cette fonction, et à cet effet nous partageons ses facteurs en trois groupes, en écrivant

$$f(x) = \left(e^{G(x)} \prod_{1}^{n_0-1}\right) \cdot \prod_{n_0}^{n_1} \cdot \prod_{n_1+1}^{\infty},$$

chaque signe Π portant sur l'expression $E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)$ et l'entier n_1 étant déterminé par la condition

$$(22) \quad \left[n_1 (\log n_1)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n_1)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}} \leq r \leq \left[(n_1+1)(\log(n_1+1))^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)}(n_1+1))^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Le module du premier de ces trois produits est inférieur à une expression de la forme $e^{\text{const. } r^p}$.

Pour le module du second produit, l'inégalité (20), où le nombre r' est maintenant égal au premier membre de (22), c'est-à-dire à $r(1+\varepsilon(r))$, fournit une limite supérieure de la forme

$$e^{\text{const. } r^\rho (\log r)^{-\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{-\alpha_\nu}}$$

Enfin, l'inégalité (21) nous donne pour le troisième produit une limite supérieure de la même forme. Donc, nous avons démontré ce théorème:

Si les zéros d'une fonction entière de genre p, à partir d'un certain d'entre eux, satisfont à la condition

$$(18) \qquad |a_n| > \left[n(\log n)^{\alpha_1} (\log^{(2)} n)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \qquad (p < \rho < p+1),$$

le module maximum $M(r)$ de cette fonction vérifie l'inégalité

$$(23) \qquad M(r) < e^{A r^\rho (\log r)^{-\alpha_1} (\log^{(2)} r)^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{-\alpha_\nu}},$$

où A est une constante positive [1]).

On peut se demander quelle est la limite inférieure des valeurs qu'il est permis d'attribuer à la constante A, sans que l'inégalité (23) cesse d'être vérifiée à partir de quelque valeur finie de r, les zéros étant assujettis à la seule condition (18). La proposition de la page 21 nous montre que cette limite certainement n'est pas inférieure à $\frac{1}{e\rho^{\alpha_1+1}}$. Mais les méthodes très élémentaires dont nous avons fait usage jusqu'à présent, ne sauraient fournir la valeur exacte qu'on demande, et ce

[1]) Ce théorème résulte d'une proposition établie antérieurement par M. PIERRE BOUTROUX dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (du 4 février 1901), qui nous avait complètement échappé et sur laquelle M. BOUTROUX, dans une Note ultérieure dont nous aurons encore à parler, a bien voulu appeler notre attention. Nous pensons cependant que la démonstration que nous donnons ci-dessus, présente, sur celle qu'a esquissée M. BOUTROUX dans sa Note, l'avantage d'une plus grande simplicité.

n'est qu'à l'aide des considérations du quatrième Chapitre de ce Mémoire que nous parviendrons à la calculer.

Si ρ est égal à p ou à $p+1$, la proposition ci-dessus n'est plus applicable. Supposons par exemple $\rho = p+1$. L'inégalité (20) restera toujours vérifiée, mais l'inégalité (21) doit être modifiée. En effet, pour que le raisonnement qui nous y a conduit reste valable, nous devons choisir $\tau' = \rho$, et nous sommes ainsi conduits à considérer l'intégrale

$$\int_{e^{\nu}}^{\infty} \left[n (\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu} \right]^{-1} dn,$$

laquelle (en admettant que $\alpha_1 > 1$) est égale à

$$\frac{1+\varepsilon(n')}{\alpha_1 - 1} (\log n')^{-\alpha_1+1} (\log^{(2)} n')^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n')^{-\alpha_\nu},$$

ou bien, avec la notation (19), à

$$\frac{1+\varepsilon(r')}{(\alpha_1 - 1)\rho^{\alpha_1 - 1}} (\log r')^{-\alpha_1+1} (\log^{(2)} r')^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r')^{-\alpha_\nu}.$$

Donc l'inégalité (21) devient

$$\left| \prod_{n'}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, p\right) \right| < e^{\text{const.} r^{\rho} \left[(\log r')^{-\alpha_1+1} (\log^{(2)} r')^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r')^{-\alpha_\nu} \right]},$$

et par suite nous obtenons, au lieu de (23), l'inégalité suivante:

$$M(r) < e^{A r^{\rho} (\log r)^{-\alpha_1+1} (\log^{(2)} r)^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{-\alpha_\nu}}, \tag{23)'}$$

A étant une constante positive. Pour $\rho = p$, on arrive au même résultat.

On pourrait être porté à croire que cette élévation de la limite supérieure de $M(r)$ dans le cas où l'ordre réel ρ est un nombre entier, tient à l'imperfection de la méthode mise en usage. Mais nous allons voir dans la seconde partie de ce Mémoire qu'il n'en est rien, et que nous touchons bien ici à la différence essentielle et profonde, qui sépare ce cas de celui où l'ordre réel n'est pas entier.

13. **Définition nouvelle plus précise de l'ordre apparent et de l'ordre réel d'une fonction entière. — Relation entre ces ordres. — Fonctions à croissance régulière.** — Les inégalités que nous venons d'établir permettent de préciser beaucoup le théorème du n° 11. Afin d'énoncer le résultat sous une forme plus nette, nous allons poser d'abord certaines définitions nouvelles.

Nous dirons que $M(r)$ *est d'ordre* $e^{r^{\rho} (\log r)^{\alpha_1} (\log^{(2)} r)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu}}$, si l'on a, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu-1)} r)^{\alpha_\nu - 1} (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu + \varepsilon}}$$

à partir d'une certaine valeur de r, et d'autre part

$$M(r) > e^{r^\rho (\log r)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu-1)} r)^{\alpha_\nu - 1} (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu - \varepsilon}}$$

pour une infinité de valeurs r dépassant toute limite donnée. Nous ajouterons que $M(r)$ *est à croissance régulière,* si la seconde de ces inégalités est vérifiée, comme la première, à partir d'une valeur finie de r, quelque petit que soit ε.

De même, nous dirons que $|a_n|$ *est d'ordre* $\left[n(\log n)^{\alpha_1} (\log^{(2)} n)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^\rho$, si les inégalités

$$|a_n| > \left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu-1)} n)^{\alpha_\nu - 1} (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu - \varepsilon}\right]^\rho$$

et

$$|a_n| < \left[n(\log n)^{\alpha_1} \cdots (\log^{(\nu-1)} n)^{\alpha_\nu - 1} (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu + \varepsilon}\right]^\rho$$

ont lieu, la première à partir d'une valeur finie de n et la seconde pour une infinité de valeurs n, quelque petit qu'on ait donné ε. Si la seconde inégalité subsiste, comme la première, à partir d'une valeur finie de n, nous ajouterons que $|a_n|$ *est à croissance régulière.*

Cela posé, on a le théorème suivant:

Si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière est d'ordre

$$e^{r^\rho (\log r)^{\alpha_1} (\log^{(2)} r)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{\alpha_\nu}}, \tag{24}$$

ρ n'étant pas un nombre entier, le module $|a_n|$ du $n^{ième}$ zéro de la fonction est d'ordre

$$\left[n(\log n)^{-\alpha_1} (\log^{(2)} n)^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{-\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{25}$$

et si $M(r)$ est à croissance régulière, il en est de même de $|a_n|$.

Inversement, si $|a_n|$ est d'ordre (25), *ρ n'étant pas un entier, et si le genre p est inférieur à ρ, $M(r)$ est d'ordre* (24); *et si $|a_n|$ est à croissance régulière, il en est de même de $M(r)$.*

Pour ce qui concerne le rapport entre les ordres de grandeur de $M(r)$ et de $|a_n|$, il suffira de consulter les propositions établies pp. 21 et 24; nous ne croyons pas nécessaire d'y insister davantage.

Reste à prouver les parties de ce théorème qui sont relatives à la croissance régulière [1]). Pour simplifier la notation, nous nous bornerons au cas où, ν étant

---

[1]) Les propositions concernant la croissance régulière ont été établies par M. BOREL pour le cas où $M(r)$ et $|a_n|$ sont respectivement d'ordre e^{r^ρ} et $n^{\frac{1}{\rho}}$ (*Leçons sur les fonctions entières,* Note II).

égal à 1, $M(r)$ et $|a_n|$ sont respectivement d'ordre $e^{r^\rho (\log r)^\alpha}$ et $\left[n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$. La démonstration pour ν quelconque serait tout à fait analogue.

Voici donc la première proposition que nous devons démontrer:

Si, quelque petit que soit ε, $M(r)$ vérifie les conditions

$$e^{r^\rho (\log r)^{\alpha-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\alpha+\varepsilon}} \tag{26}$$

à partir d'une valeur finie de r, ρ n'étant pas un nombre entier, les zéros vérifient les inégalités

$$\left[n(\log n)^{-\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}} < |a_n| < \left[n(\log n)^{-\alpha+\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{27}$$

pour n suffisamment grand, quelque petit que soit ε.

On suppose démontré que $|a_n|$ est d'ordre $\left[n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$, c'est à dire qu'on a

$$|a_n| > \left[n(\log n)^{-\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

pour n suffisamment grand, et

$$|a_n| < \left[n(\log n)^{-\alpha+\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

pour une infinité de valeurs n. Il reste donc à faire voir que cette dernière inégalité subsiste pour toutes les valeurs n dépassant une certaine limite, et cela quelque petit qu'on donne le nombre positif ε.

Si ceci n'était pas vrai, il existerait un nombre positif σ tel qu'on eût

$$|a_n| > \left[n(\log n)^{-\alpha+\sigma}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{28}$$

pour une infinité de valeurs n. En nous plaçant dans cette hypothèse, nous allons voir que $M(r)$ ne saurait être à croissance régulière.

Après avoir fixé le nombre ε, nous pouvons trouver un entier n_0 tel qu'on ait

$$|a_n| > \left[n(\log n)^{-\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour } n > n_0, \tag{29}$$

et d'autre part un entier n_1 supérieur à n_0 et d'ailleurs aussi grand qu'on voudra, pour lequel l'inégalité (28) ait lieu:

$$|a_{n_1}| > \left[n_1(\log n_1)^{-\alpha+\sigma}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Déterminons encore l'entier n_2 par la condition

$$n_2(\log n_2)^{-\alpha-\varepsilon} \leqq n_1(\log n_1)^{-\alpha+\sigma} \leqq (n_2+1)(\log(n_2+1))^{-\alpha-\varepsilon},$$

et posons enfin

$$r_1 = \left[n_1 (\log n_1)^{-\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad r = \left[n_1 (\log n_1)^{-\alpha+\frac{\sigma}{2}}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad r_2 = \left[n_1 (\log n_1)^{-\alpha+\sigma}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

d'où suit, à des facteurs près de la forme $1+\varepsilon(r)$,

$$r_1 = \text{const. } r (\log r)^{-\frac{\sigma}{2\rho}-\frac{\varepsilon}{\rho}}; \quad r_2 = \text{const. } r (\log r)^{\frac{\sigma}{2\rho}}. \tag{30}$$

Cela posé, écrivons la fonction donnée sous la forme

$$f(x) = \left(e^{G(x)} \prod_{1}^{n_0}\right) \cdot \prod_{n_0+1}^{n_1} \cdot \prod_{n_1+1}^{n_2} \cdot \prod_{n_2+1}^{\infty},$$

chaque signe Π portant sur l'expression $E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)$, et cherchons une limite supérieure du module de chacun de ces quatre produits sur le cercle $|x| = r$, r ayant la valeur indiquée ci-dessus.

Le module du premier produit est inférieur à une expression de la forme $e^{\text{const. } r^p}$

Les zéros des trois autres produits vérifient tous la condition (29), de sorte que nous pouvons appliquer les inégalités du numéro précédent. Nous trouvons ainsi, à l'aide de (20), que le module du deuxième produit est inférieur à

$$e^{\text{const. } r^\tau \left[r_1^{\rho-\tau} (\log r_1)^{\alpha+\varepsilon}\right]},$$

ou bien, d'après (30), à

$$e^{\text{const. } r^\rho (\log r)^{\alpha - \frac{\rho-\tau}{\rho}\frac{\sigma}{2} + \frac{\tau}{\rho}\varepsilon}}, \tag{31}$$

et de même l'inégalité (21), en observant que $\left[(n_2+1)(\log(n_2+1))^{-\alpha-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{\rho}} = r_2(1+\varepsilon(r_2))$, nous donne pour le module du quatrième produit une limite supérieure de la forme

$$e^{\text{const. } r^{\tau'} \left[r_2^{\rho-\tau'} (\log r_2)^{\alpha+\varepsilon}\right]},$$

ou bien, d'après (30),

$$e^{\text{const. } r^\rho (\log r)^{\alpha - \frac{\tau'-\rho}{\rho}\frac{\sigma}{2} + \varepsilon}}. \tag{32}$$

Reste le troisième produit. Les modules de tous ses zéros étant $\geqq |a_{n_1}|$ et par suite supérieurs à r_2, nous trouvons d'abord, en appliquant l'inégalité fondamentale du n° 2, que le module de ce produit est inférieur à

$$e^{\text{const. } n_2 \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\tau'}}.$$

Or, les inégalités qui définissent n_2 nous donnent

$$n_2 = (1+\varepsilon(r_2))\, \rho^{\alpha+\varepsilon} r_2^{\rho} (\log r_2)^{\alpha+\varepsilon},$$

d'où il suit, en négligeant des facteurs qui tendent vers l'unité lorsque r tend vers ∞,

$$\frac{n_2}{r_2^{\tau'}} = \text{const. } r_2^{\rho-\tau'} (\log r_2)^{\alpha+\varepsilon} = \text{const. } r^{\rho-\tau'} (\log r)^{\alpha-\frac{\tau'-\rho}{\rho}\frac{\sigma}{2}+\varepsilon},$$

de sorte que nous obtenons aussi pour le module du troisième produit une limite supérieure de la forme (32).

Rappelons que les nombres τ et τ' ont été choisis de manière à vérifier les inégalités $p < \tau < \rho < \tau' < p+1$, de sorte que les différences $\rho - \tau$ et $\tau' - \rho$ sont positives. Dès lors, en désignant par σ_1 la plus petite des quantités

$$\frac{\rho-\tau}{\rho}\cdot\frac{\sigma}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\tau'-\rho}{\rho}\cdot\frac{\sigma}{2},$$

et en choisissant le nombre ε inférieur à $\frac{\sigma_1}{2}$, d'où suit $\frac{\tau}{\rho}\varepsilon < \frac{\sigma_1}{2}$, nous pouvons conclure du raisonnement qui précède que l'inégalité

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\alpha-\frac{\sigma_1}{2}}}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs r dépassant toute limite donnée. C'est dire que $M(r)$ *est à croissance irrégulière.*

Donc, si $M(r)$ est à croissance régulière, il en est de même de $|a_n|$, ce que nous voulions établir.

Démontrons maintenant la proposition inverse:

Si, quelque petit que soit ε, *les zéros satisfont aux conditions* (27) *à partir d'une valeur finie de* n, $M(r)$ *vérifie les inégalités* (26) *dès que* r *est suffisamment grand, quelque petit qu'on ait donné* ε.

On suppose démontré que $M(r)$ est bien d'ordre $e^{r^\rho (\log r)^\alpha}$. — Nous aurons encore à suivre la voie indirecte. Supposons donc que cette proposition ne soit pas exacte; en d'autres termes, admettons qu'il existe un nombre positif σ tel qu'on ait

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\alpha-\sigma}}$$

pour des valeurs r dépassant toute limite donnée. Nous allons encore nous heurter à une contradiction.

Après avoir fixé une valeur r_2 pour laquelle la condition qui précède est remplie, déterminons r_1 par l'équation

$$r_1^\rho (\log r_1)^{\alpha-\frac{\sigma}{2}} = r_2^\rho (\log r_2)^{\alpha-\sigma}.$$

Puisque $M(r)$ est une fonction croissante, nous avons pour $r < r_2$

$$M(r) < e^{r_2^\rho (\log r_2)^{\alpha-\sigma}} = e^{r_1^\rho (\log r_1)^{\alpha-\frac{\sigma}{2}}},$$

et par suite

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^{\alpha - \frac{\sigma}{2}}},$$

tant que r restera dans l'intervalle (r_1, r_2). D'après l'hypothèse admise, nous pouvons d'ailleurs trouver une infinité de tels intervalles (r_1, r_2), extérieurs les uns aux autres, où cette inégalité est vérifiée.

Dès lors, la première proposition du n° 9 nous donne

$$|a_n| > r\, e^{-\frac{1}{n} r^\rho (\log r)^{\alpha - \frac{\sigma}{2}}}$$

pour toute valeur r faisant partie de l'un quelconque des intervalles en question. D'après les calculs de la p. 21, le second membre de cette inégalité atteint son maximum pour

$$r = \varphi(n) \equiv (1 + \varepsilon(n)) \left[\rho^{\alpha - \frac{\sigma}{2} - 1} n (\log n)^{-\alpha + \frac{\sigma}{2}}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

et ce maximum est égal à

$$(1 + \varepsilon(n)) \left[\frac{\rho^{\alpha - \frac{\sigma}{2} - 1}}{e} n (\log n)^{-\alpha + \frac{\sigma}{2}}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Comme le rapport $\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ tend vers l'unité lorsque n tend vers l'infini, tandis que le rapport

$$\frac{r_2}{r_1} = (1 + \varepsilon(r_2)) (\log r_2)^{\frac{\sigma}{2\rho}}$$

croît indéfiniment avec r_2, il existe évidemment une infinité de nombres entiers n tels que la valeur $r = \varphi(n)$ fasse partie des intervalles considérés, et par suite nous arrivons à cette conclusion, que l'inégalité

$$|a_n| > (1 - \varepsilon) \left[\frac{\rho^{\alpha - \frac{\sigma}{2} - 1}}{e} n (\log n)^{-\alpha + \frac{\sigma}{2}}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de l'indice n, quelque petit que soit ε, ce qui veut dire que $|a_n|$ *est à croissance irrégulière.*

Cette conclusion étant en contradiction avec l'hypothèse admise, notre proposition est démontrée.

14. **Suite des considérations sur les fonctions à croissance régulière.** — Démontrons encore le théorème suivant qui sert à préciser beaucoup les propositions que nous venons d'établir relativement aux fonctions à croissance régulière.

Si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière de genre p, à partir d'une certaine valeur de r, vérifie les inégalités

$$e^{Ar^{\rho}(\log r)^{\alpha}} < M(r) < e^{Br^{\rho}(\log r)^{\alpha}} \qquad (p < \rho < p+1),$$

A et B étant des constantes positives, on peut trouver deux autres constantes positives A_1 et B_1 telles qu'on ait, à partir d'un certain indice n.

$$\left[A_1 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} < |a_n| < \left[B_1 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Inversement, si les zéros satisfont à ces dernières conditions, on peut déterminer les nombres A et B de telle sorte que les inégalités précédentes soient vérifiées.

Nous nous contenterons d'indiquer rapidement la démonstration de la première partie de ce théorème, la marche à suivre étant absolument la même qu'au n° 13.

La proposition de la page 21 montre d'abord qu'on peut prendre

$$A_1 = (1-\varepsilon)\frac{\rho^{\alpha-1}}{Be},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Il reste donc à démontrer l'existence d'un nombre B_1 répondant aux conditions du théorème.

S'il n'existait pas un tel nombre B_1, l'inégalité

$$|a_n| > \left[\sigma A_1 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

serait vérifiée pour une infinité d'indices n, quelque grand que fût le nombre positif σ. Nous allons montrer que cette dernière hypothèse n'est pas compatible avec les données du théorème.

A cet effet, après avoir fixé le nombre σ, déterminons les entiers n_0, n_1, n_2 par les conditions

$$|a_n| > \left[A_1 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{pour } n > n_0,$$

$$|a_{n_1}| > \left[\sigma A_1 n_1 (\log n_1)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

$$n_2 (\log n_2)^{-\alpha} \leq \sigma n_1 (\log n_1)^{-\alpha} \leq (n_2+1)(\log(n_2+1))^{-\alpha},$$

et posons

$$r_1 = \left[A_1 n_1 (\log n_1)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad r = \left[\sqrt{\sigma} A_1 n_1 (\log n_1)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad r_2 = \left[\sigma A_1 n_1 (\log n_1)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

d'où il suit

$$r_1 = r\sigma^{-\frac{1}{2\rho}}, \quad r_2 = r\sigma^{\frac{1}{2\rho}}.$$

En écrivant maintenant la fonction donnée sous la forme

$$f(x)=\left(e^{G(x)}\prod_{1}^{n_0}\right)\cdot\prod_{n_0+1}^{n_1}\cdot\prod_{n_1+1}^{n_2}\cdot\prod_{n_2+1}^{\infty},$$

chaque signe Π portant sur l'expression $E\left(\frac{x}{a_n}, p\right)$, et en suivant fidèlement les raisonnements des pages 28—29, on voit d'abord que, pour $|x|=r$, le module du premier des quatre produits ci-dessus est inférieur à $e^{\text{const. } r^\rho}$, puis on trouve pour le module du deuxième produit une limite supérieure de la forme

$$e^{C\sigma^{-\frac{1}{2\rho}(\rho-\tau)}r^\rho(\log r)^\alpha},$$

et pour le module de chacun des deux derniers produits la limite

$$e^{C'\sigma^{-\frac{1}{2\rho}(\tau'-\rho)}r^\rho(\log r)^\alpha},$$

C et C' désignant des constantes positives, qu'on peut fixer de telle sorte que ces limites soient valables pour toute valeur de σ, à condition qu'on prenne n_1, et par suite r suffisamment grands.

L'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placés conduit donc à cette conclusion que, ε étant donné aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$M(r)<e^{\varepsilon r^\rho(\log r)^\alpha}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs r indéfiniment croissantes, conclusion qui contredit les données du théorème. L'existence du nombre B_1 est donc démontrée.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION ENTIÈRE DONNÉE PAR SON DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

15. **Recherche d'une limite supérieure des modules des coefficients, étant donnée une limite supérieure du module de la fonction.** — Une fonction entière quelconque $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'une série suivant les puissances entières et positives de x, convergente pour toutes les valeurs de cette variable. Soit

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{33}$$

ce développement; d'après une proposition de CAUCHY, les coefficients c jouiront de la propriété

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0, \tag{34}$$

et inversement, tout développement (33) dont les coefficients vérifient cette condition, représentera une fonction entière de x.

Désignons toujours par $M(r)$ le maximum du module de la fonction donnée sur le cercle $|x| = r$. En vertu d'une propriété fondamentale des fonctions analytiques, ce maximum est supérieur au module d'un terme quelconque du développement (33) pour la même valeur de $|x|$, de sorte que *l'inégalité*

$$|c_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

est vérifiée pour toutes les valeurs de r et de l'indice n.

C'est là un résultat tout à fait analogue à l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{|a_1 a_2 \cdots a_n|}} < \frac{M(r)}{r^n},$$

trouvée au n° 9 du premier Chapitre. Nous pouvons donc appliquer ici directement les calculs et les raisonnements des n^{os} 9, 11 et 12, et nous arrivons ainsi aux résultats suivants:

Si, à partir d'une certaine valeur de r, $M(r)$ vérifie l'inégalité

$$M(r) < e^{A r^{\rho}},$$

A étant une constante positive, on aura, quelque petit que soit ε,

$$\sqrt[n]{|c_n|} < (1+\varepsilon)\left(\frac{A e \rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

dès que n *dépassera une certaine limite.*

Et de même, en transcrivant le théorème de la p. 21:

Si la condition

$$M(r) < e^{A r^{\rho} (\log r)^{a_1} (\log^{(2)} r)^{a_2} \cdots (\log^{(\nu)} r)^{a_\nu}} \tag{35}$$

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de r, *on aura, quelque petit que soit* ε,

$$\sqrt[n]{|c_n|} < (1+\varepsilon)\left[\frac{A e \rho^{1-a_1}}{n (\log n)^{-a_1} (\log^{(2)} n)^{-a_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{-a_\nu}}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{36}$$

dès que r *dépassera une certaine limite.*

Nous avons vu à la fin du n° 3, qu'une fonction entière quelconque de genre p croît moins vite que l'expression $e^{\varepsilon r^{p+1}}$, et cela quelque petit que soit le nombre positif ε. A l'aide de la première proposition ci-dessus, nous en tirons le résultat suivant, dû à M. POINCARÉ

Les coefficients du développement taylorien d'une fonction entière quelconque de genre p *jouissent de la propriété exprimée par l'égalité*

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p+1}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \tag{37}$$

Dans les cas où cette égalité n'a pas lieu, nous pouvons donc affirmer que le développement (33) (sous la condition (34)) définit une fonction entière de genre supérieur à p.

16. **Problème inverse du précédent. — Méthodes proposées antérieurement. — Exposition d'une méthode élémentaire.** — Il s'agit de trouver une limite supérieure du module d'une fonction entière en partant de son développement de TAYLOR. A cet effet on remplacera d'abord la fonction donnée par une fonction *majorante* convenablement choisie. Comme le démontre M. HADAMARD dans son grand Mémoire, on peut toujours donner à cette dernière fonction la forme

$$F(x) = \sum \left(\frac{x}{g(n)}\right)^n, \tag{38}$$

$\varphi(n)$ étant une fonction continue et positive, constamment croissante à partir d'une certaine valeur de n et tendant vers l'infini en même temps que n. On est ainsi ramené à *chercher une limite supérieure ou une expression asymptotique de la fonction entière $F(x)$ pour les valeurs positives de x.*

M. HADAMARD a consacré à l'étude de ce problème une partie du Mémoire que nous venons de citer. La méthode intéressante mais assez compliquée qui s'y trouve exposée, conduit à ce résultat, qu'en admettant relativement à $\varphi(n)$ une hypothèse très générale, la fonction $F(x)$ vérifie, à partir d'une valeur finie de n, l'inégalité

$$F(x) < x^{\varepsilon} e^{\int^{x} \frac{\psi(x)}{x} dx}$$

ψ désignant la fonction inverse de φ et ε, comme toujours, un nombre positif donné à l'avance aussi petit que l'on veut.

Bien qu'il soit possible de simplifier et de préciser notablement la méthode que nous venons de rappeler, elle ne saurait cependant fournir de résultats suffisamment exacts. Aussi M. HADAMARD est-il bientôt revenu sur cette question [1]), en esquissant une nouvelle méthode à la fois plus simple et plus exacte que la précédente, méthode qu'il a revêtue d'une forme géométrique très élégante. Pour les applications, cette seconde méthode conduit en somme à la règle suivante:

Qu'on construise d'abord la courbe

$$y = x \log \varphi(x), \tag{39}$$

puis la réciproque de celle-ci par rapport à la parabole $x^2 = 2y$; l'équation de cette seconde courbe étant mise sous la forme $y = \Phi(x)$, l'expression

$$e^{\Phi(\log x)} \tag{40}$$

représentera asymptotiquement la fonction $F(x)$, en ce sens que *le rapport des logarithmes de ces deux expressions tendra vers l'unité lorsque x tendra vers l'infini* [2]).

Ce résultat comporte précisément le degré d'exactitude qu'exige la théorie générale qui nous occupe. Pour abréger, nous conviendrons de dire que deux fonctions croissantes sont du même *ordre de grandeur*, si leurs logarithmes vérifient la condition que nous venons d'énoncer.

---

[1]) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 24, p. 186.

[2]) En ce dernier point, l'exposition de M. HADAMARD ne nous semble pas entièrement rigoureuse.

Nous devons signaler enfin une méthode très précise exposée par M. LE ROY dans un travail récent [1]). En ramenant le problème en question au calcul approché d'une intégrale définie, M. LE ROY obtient, dans des cas assez étendus, une expression asymptotique de la fonction $F(x)$ dont le rapport à cette fonction tend vers l'unité lorsque x tend vers l'infini. C'est évidemment un résultat bien plus exact que le précédent.

Nous allons reprendre cette question par une méthode très élémentaire [2]), fondée sur une idée simple et naturelle dont on a d'ailleurs tiré parti pour d'autres questions d'Analyse [3]). Dans les cas les plus importants où la fonction $\varphi(n)$ croît d'une manière simple, cette méthode nous conduira d'un coup au résultat de M. HADAMARD, et une discussion facile nous permettra d'atteindre le même degré d'approximation que M. LE ROY.

La variable x ayant une valeur fixe quelconque, considérons l'expression

$$\left(\frac{x}{\varphi(n)}\right)^n \tag{41}$$

comme fonction de n. Pour les valeurs positives de n cette expression aura un maximum bien déterminé, qui sera évidemment une fonction continue et croissante de x et que nous désignerons par $\Omega(x)$.

Si l'on admet que la fonction $\varphi(n)$ a une dérivée continue, et qu'on désigne par α la valeur de n pour laquelle le maximum de l'expression (41) est atteint, on trouve de suite, en différentiant,

$$\Omega(x) = e^{\frac{\alpha^2 \varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}}, \tag{42}$$

α étant donné en fonction de x par l'équation

$$x = \varphi(\alpha)\, e^{\frac{\alpha \varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}}. \tag{43}$$

---

[1]) *Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, Novembre 1900).

[2]) Le présent travail était déjà sous presse lorsqu'a paru le petit livre de M. BOREL, intitulé *Leçons sur les séries à termes positifs*. Nous y avons vu que l'auteur, dans son Cours au Collège de France au commencement de l'année 1901, a enseigné précisément la même méthode que nous développons ici, toutefois sans pousser l'approximation aussi loin que nous le ferons.

[3]) C'est p. ex. cette même idée dont s'est servi J. BERTRAND dans son *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* (t. II, p. 243), pour déduire la formule de STIRLING directement de l'intégrale eulerienne.

Nous devons supposer, bien entendu, qu'à partir d'une certaine valeur de x le second membre de cette équation va constamment en croissant, de sorte qu'elle détermine bien α comme fonction croissante de x.

Formons maintenant le rapport du terme général T_n du développement (38) au maximum $\Omega(x)$. On trouve

$$\frac{T_n}{\Omega(x)} = \left(\frac{x}{\varphi(n)}\right)^n : \Omega(x) = \left(\frac{x}{\varphi(\alpha)}\right)^n \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(n)}\right)^n : \left(\frac{x}{\varphi(\alpha)}\right)^\alpha$$

$$= \left(\frac{x}{\varphi(\alpha)}\right)^{n-\alpha} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(n)}\right)^n = [\Omega(x)]^{\frac{n-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(n)}\right)^n,$$

ou enfin, en tenant compte de l'égalité (42),

$$\frac{T_n}{\Omega(x)} = e^{\alpha(n-\alpha)\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} - n\log\left(\frac{\varphi(n)}{\varphi(\alpha)}\right)}. \tag{44}$$

C'est par l'étude attentive de ce rapport qu'on arrive aux résultats très précis annoncés ci-dessus, comme nous l'expliquerons aux numéros suivants sur des exemples particuliers. Mais si l'on se contente du degré de précision qu'exige la théorie générale exposée dans ce Mémoire, on pourra procéder plus sommairement, en enfermant la fonction $F(x)$ entre deux limites qu'on aperçoit immédiatement.

Comme limite inférieure, il suffira de choisir le terme maximum $T_{\alpha'}$ du développement (38) pour la valeur considérée de x. L'indice α' de ce terme est évidemment égal à l'un des entiers consécutifs entre lesquels est compris le nombre α, ou à ce nombre même, s'il est entier. En désignant par $T(x)$ la fonction continue et croissante qui, pour toute valeur de x, est égale au terme maximum correspondant $T_{\alpha'}$, nous avons donc cette première inégalité

$$F(x) > T(x). \tag{45}$$

Pour trouver une limite supérieure de $F(x)$, déterminons d'abord n_1 par la condition

$$\frac{x}{\varphi(n_1)} = \frac{1}{k},$$

k étant un nombre quelconque supérieur à l'unité, ce qui nous donne $n_1 = \psi(kx)$, en désignant toujours par ψ la fonction inverse de φ; puis partageons les termes du développement (38) en deux groupes, en écrivant

$$F(x) = \sum^{n'} \left(\frac{x}{\varphi(n)}\right)^n + \sum_{n'+1}^{\infty} \left(\frac{x}{\varphi(n)}\right)^n,$$

n' étant l'entier positif qui précède immédiatement le nombre n_1.

La seconde de ces deux sommes est inférieure à

$$\sum_{n'+1}^{x}\left(\frac{1}{k}\right)^n=\frac{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{n'+1}<\frac{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{\psi(kx)},$$

expression qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. La première somme est inférieure à n' max. $\left(\frac{x}{\varphi(n)}\right)^n$, et par suite à plus forte raison inférieure à $\psi(kx)\,\Omega(x)$. D'ailleurs la différence entre cette dernière expression et la somme en question tendra évidemment vers l'infini en même temps que x. Donc on aura, à partir d'une certaine valeur de x,

$$F(x)<\psi(kx)\,\Omega(x). \tag{46}$$

Or, dans les cas où la fonction $\varphi(n)$ croît d'une manière simple, on constatera immédiatement, que les limites qu'on vient de trouver pour la fonction $F(x)$ sont du même ordre de grandeur, dans le sens indiqué plus haut, et par suite aussi du même ordre que $\Omega(x)$, et on arrivera ainsi à ce résultat que $F(x)$ *est du même ordre de grandeur que* $T(x)$, ou si l'on veut, que $F(x)$ *est du même ordre de grandeur que* $\Omega(x)$.

Il est facile de voir que ce dernier résultat est précisément celui auquel conduit la seconde méthode de M. HADAMARD. En effet, l'équation de la polaire d'un point $(x=\alpha,\ y=\alpha\log\varphi(\alpha))$ de la courbe (39) par rapport à la parabole $x^2=2y$, s'écrit

$$y=\alpha x-\alpha\log\varphi(\alpha).$$

L'enveloppe de cette polaire, qui est précisément la courbe réciproque de (39) par rapport à la dite parabole, s'obtient en éliminant α entre l'équation qu'on vient d'écrire et la suivante, qui s'en déduit en différentiant par rapport à α:

$$x=\log\varphi'(\alpha)+\alpha\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

L'équation de la courbe réciproque peut donc s'écrire:

$$y=\alpha^2\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\Phi(x),$$

α étant donné en fonction de x par l'équation qui précède. En remplaçant x par $\log x$ et en se reportant aux équations (42) et (43), on voit dès lors que l'expression (40) est identique à $\Omega(x)$.

17. **Application de la méthode précédente à un exemple particulier.** — Après ces indications sommaires sur la méthode générale, nous allons traiter en détail un exemple particulier important, à savoir la fonction

$$F(x)=\sum_{1}^{x}\left(\frac{x}{n^{\rho}}\right)^n,$$

ρ ayant une valeur positive quelconque. En conservant la notation du numéro précédent, on aura

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{\rho}}, \qquad \psi(x) = x^{\rho},$$

les formules (42) et (43) donneront

$$\alpha = \frac{x^{\rho}}{e^{\rho}}; \qquad \Omega(x) = e^{\frac{x^{\rho}}{e\rho}},$$

ot l'égalité (44) s'écrira, en posant $n = \alpha + p$:

$$\frac{T_n}{\Omega(x)} = e^{\frac{p}{\rho} - \frac{\alpha+p}{\rho}\log\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)} \qquad (n = \alpha + p). \tag{47}$$

Pour une valeur donnée quelconque de p, le second membre de cette dernière égalité tend vers l'unité lorsque α tend vers l'infini. Il s'ensuit que le rapport $F(x) : \Omega(x)$ tendra vers l'infini en même temps que x, de sorte qu'on pourra prendre $\Omega(x)$ au lieu de $T(x)$ comme limite inférieure de $F(x)$. En conservant la limite supérieure (46), on arrive ainsi à cette double inégalité:

$$e^{\frac{x^{\rho}}{e\rho}} < \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{n} < (kx)^{\rho}\, e^{\frac{x^{\rho}}{e\rho}},$$

d'où l'on tire la formule asymptotique

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{n} = e^{(1+\varepsilon(x))\frac{x^{\rho}}{e\rho}}, \tag{48}$$

Cette formule renferme le théorème suivant dont nous aurons plus loin à faire usage:

Si les coefficients d'une série entière (33), *à partir d'un certain d'entre eux, vérifient l'inégalité*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{(An)^{\frac{1}{\rho}}},$$

A étant une constante positive, on aura, quelque petit que soit ε,

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho}r^{\rho}},$$

dès que r dépassera une certaine limite.

Cherchons maintenant à préciser la formule (48) et reprenons à cet effet l'équation (47). Comme

$$\frac{d}{dp}\left\{\frac{p}{\rho} - \frac{\alpha+p}{\rho}\log\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)\right\} = -\frac{1}{\rho}\log\left(1+\frac{p}{\alpha}\right),$$

on voit d'abord que, pour une valeur donnée de x ou de α, le second membre de cette équation atteint son maximum ($=1$) pour $p=0$, et qu'il va constamment en décroissant lorsque p croît par valeurs positives ou décroît par valeurs négatives. D'autre part, en développant l'exposant de e suivant les puissances positives de p, on trouve, pour $|p|<\alpha$,

$$(49)\qquad \frac{p}{\rho}-\frac{\alpha+p}{\rho}\log\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)=-\frac{1}{1\cdot 2}\frac{p^2}{\alpha\rho}+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{p^3}{\alpha^2\rho}-\frac{1}{3\cdot 4}\frac{p^4}{\alpha^3\rho}+\cdots$$
$$=-\frac{p^2}{2\rho\alpha}\left\{1-\frac{1}{3}\frac{p}{\alpha}+\frac{1}{6}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Soit maintenant τ un nombre positif compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et partageons les termes de l'expression

$$\frac{F(x)}{\Omega(x)}=\sum\frac{T_n}{\Omega(x)}$$

en quatre groupes, caractérisés resp. par les inégalités suivantes:

$$n<\alpha-\alpha^\tau;\quad \alpha-\alpha^\tau<n<\alpha+\alpha^\tau;\quad \alpha+\alpha^\tau<n<\psi(kx);\quad n>\psi(kx),$$

k étant un nombre quelconque supérieur à l'unité.

Il suit d'abord du raisonnement du n° 16, que la somme des termes du dernier groupe (même si on la multiplie par $\Omega(x)$) tendra vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Les termes du premier groupe sont tous inférieurs à la valeur que prend le second membre de (47) pour $p=-\alpha$, valeur qui peut s'écrire, d'après (49),

$$e^{-\frac{1+\varepsilon(\alpha)}{2\rho}\alpha^{2\tau-1}}.$$

Comme $2\tau-1>0$, d'après l'hypothèse, et comme le nombre des termes en question est inférieur à $\alpha-\alpha^\tau$, on voit que leur somme tend vers zéro lorsque α ou x tend vers l'infini.

Par un raisonnement tout à fait analogue, on s'assure que la somme des termes du troisième groupe s'annule pour $x=\infty$.

Reste le second groupe. D'après l'équation (49), l'un quelconque de ses termes satisfait aux inégalités

$$e^{-\frac{p^2(1+\mu)}{2\rho\alpha}}<\frac{T_n}{\Omega(x)}<e^{-\frac{p^2(1-\mu)}{2\rho\alpha}},$$

où $\mu=\frac{1}{3}\alpha^{-(1-\tau)}+\frac{1}{6}\alpha^{-2(1-\tau)}+\cdots$, p étant toujours donné par l'égalité $n=\alpha+p$, et leur somme restera donc comprise entre les limites

$$\sum_p e^{-\frac{p^2(1+\mu)}{2\rho\alpha}} \quad \text{et} \quad \sum_p e^{-\frac{p^2(1-\mu)}{2\rho\alpha}}.$$

D'autre part, en vertu d'un théorème de CAUCHY que nous avons eu déjà l'occasion de rappeler, ces dernières sommes sont équivalentes aux intégrales

$$\int_{-\alpha^\rho}^{\alpha^\rho} e^{-\frac{p^2(1+\mu)}{2\rho\alpha}} dp \quad \text{et} \quad \int_{-\alpha^\rho}^{\alpha^\rho} e^{-\frac{p^2(1-\mu)}{2\rho\alpha}} dp,$$

à des quantités près dont la valeur numérique restera inférieure à un nombre fixe, quel que soit α. Or, en posant

$$p = \sqrt{\frac{2\rho\alpha}{1+\mu}} \cdot t \quad \text{resp.} \quad p = \sqrt{\frac{2\rho\alpha}{1-\mu}} \cdot t,$$

et en tenant compte de l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

on voit que ces intégrales peuvent se mettre toutes les deux sous la forme

$$\sqrt{2\pi\rho\alpha}\,(1+\varepsilon(\alpha)).$$

Il en sera donc de même de la somme des termes du second groupe considéré ci-dessus, de sorte que nous arrivons finalement à la formule

$$\sum_1^\infty \left(\frac{x}{n^\rho}\right)^n = (1+\varepsilon(x))\sqrt{\frac{2\pi\rho}{e}}\, x^{\frac{\rho}{2}}\, e^{e^\rho}, \tag{48)'}$$

qui fournit évidemment un résultat beaucoup plus précis que la formule (48).

18. **Suite des applications.** — Après avoir tant insisté sur l'exemple qui précède, nous pourrons passer plus rapidement sur les autres applications que nous aurons à faire de la méthode du n° 16.

Faisons d'abord dans le développement (38)

$$\varphi(n) = \left[n\,(\log n)^\sigma\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

ρ étant un nombre positif et σ un nombre réel quelconque. Les égalités (42) et (43) deviendront

$$\Omega(x) = e^{\frac{\alpha}{\rho}\left(1+\frac{\sigma}{\log\alpha}\right)}, \tag{50}$$

$$x = \varphi(\alpha)\, e^{\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{\sigma}{\log\alpha}\right)}.$$

Dans une première approximation, on en tire

$$\alpha = \frac{1+\varepsilon(x)}{e\rho^\sigma}\frac{x^\rho}{(\log x)^\sigma}, \quad \Omega(x) = e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{e\rho^\sigma+1}\frac{x^\rho}{(\log x)^\sigma}};$$

en poussant l'approximation plus loin, on pourrait préciser les facteurs $1+\varepsilon(x)$ qui figurent dans ces expressions, mais nous ne nous y arrêterons pas.

On constate d'ailleurs immédiatement, comme dans l'exemple précédent, que la fonction donnée est du même ordre de grandeur que $\Omega(x)$; en désignant par n_0 un entier quelconque supérieur à l'unité, on aura donc cette formule asymptotique:

$$\sum_{n_0}^{\infty}\left(\frac{x}{\left[n(\log n)^\sigma\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right)^n = e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{e\rho^\sigma+1}\frac{x^\rho}{(\log x)^\sigma}}. \tag{51}$$

L'étude du rapport (44) permet de préciser notablement ce résultat. En effet, on trouve par un calcul facile

$$\frac{T_n}{\Omega(x)} = e^{-\frac{p^2}{2\rho\alpha}(1+\mu)} \qquad (n=\alpha+p),$$

la quantité μ tendant uniformément vers zéro pour $|p| \leq \alpha^\tau$ $(\tau<1)$, lorsque α augmente indéfiniment. En répétant le raisonnement du numéro précédent, on arrive donc à la formule

$$\sum_{n_0}^{\infty}\left(\frac{x}{\left[n(\log n)^\sigma\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right)^n = (1+\varepsilon(x))\sqrt{2\pi\rho\alpha}\,\Omega(x) \equiv (1+\varepsilon(x))\sqrt{\frac{2\pi}{e\rho^{\sigma-1}}}\,x^{\frac{\rho}{2}}(\log x)^{-\frac{\sigma}{2}}\Omega(x), \tag{51'}$$

$\Omega(x)$ étant donné en fonction de x par les équations (50).

Énonçons encore le théorème suivant, auquel on arrive par une généralisation facile de la formule (51):

Si les coefficients d'une série entière (33) *vérifient l'inégalité*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\left[An(\log n)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}} \tag{52}$$

à partir d'un certain indice n, on aura, quelque petit que soit ε,

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho^{\alpha_1}+1}r^\rho(\log r)^{-\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}r)^{-\alpha_\nu}}, \tag{53}$$

dès que r dépassera une certaine limite.

Soit maintenant la fonction

$$\sum_{n_0}^{\infty}\left(\frac{x}{(\log n)^{\frac{1}{\rho}}}\right)^n,$$

qui n'est pas de genre fini. Les équations (42) et (43) s'écrivent

$$\Omega(x) = e^{\rho^{\frac{\alpha}{\log \alpha}}}, \qquad x = (\log \alpha)^{\rho} e^{\rho \frac{1}{\log \alpha}},$$

d'où l'on tire dans une première approximation

$$\Omega(x) = e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{e\rho}} x^{-\rho} e^{x^{\rho}}$$

Cette même expression pourra encore servir à représenter la fonction donnée. L'étude du quotient (44) conduirait à la formule plus précise

$$\sum_{n_0}^{\infty} \left(\frac{x}{(\log n)^{\frac{1}{\rho}}} \right)^n = (1+\varepsilon(x)) \sqrt{\frac{2\pi\rho}{e}} x^{\frac{\rho}{2}} e^{\frac{1}{2} x^{\rho}} \Omega(x).$$

Comme dernier exemple, considérons la fonction

$$\sum_{0}^{\infty} q^{n^2} x^n,$$

q étant un nombre positif inférieur à l'unité. C'est une fonction entière dont l'ordre réel est égal à 0. On trouve de suite, en posant $\frac{1}{q} = q_1$,

$$\alpha = \frac{\log x}{2 \log q_1}, \qquad \Omega(x) = e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}},$$

et l'équation (44) prend la forme suivante très simple:

$$\frac{T_n}{\Omega(x)} = q^{(n-\alpha)^2}.$$

En désignant par n' la partie entière du nombre α, et en posant $\alpha = n' + \tau$ $(0 \leq \tau < 1)$, on a donc identiquement

$$\sum_{0}^{\infty} q^{n^2} x^n = e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}} \sum_{-n'}^{\infty} q^{(n-\tau)^2}. \tag{54}$$

Lorsque x tend vers l'infini, la somme figurant au second membre de (54) tendra vers

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n-\tau)^2}.$$

Désignons par M le maximum et par m le minimum de cette expression, considérée comme fonction de τ. On aura d'ailleurs

$$M = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{et} \quad m = 2 \sum_{0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

(la seconde égalité au moins tant que q sera inférieur à une certaine limite).

Cela posé, l'équation (54) montre qu'on aura, quelque petit que soit le nombre positif ε, d'une part les inégalités

$$\sum_0^\infty q^{n^2} x^n < M e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}}$$

pour toutes les valeurs positives de x, et

$$\sum_0^\infty q^{n^2} x^n > (M - \varepsilon) e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}}$$

pour des valeurs x dépassant toute limite donnée, et d'autre part

$$\sum_0^\infty q^{n^2} x^n > (m - \varepsilon) e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}}$$

à partir d'une certaine valeur de x, et

$$\sum_0^\infty q^{n^2} x^n < m e^{\frac{(\log x)^2}{4 \log q_1}}$$

pour des valeurs x dépassant toute quantité donnée.

On peut donc dire, à un certain point de vue, qu'à l'infini la fonction considérée oscille entre deux fonctions à croissance régulière. De telles oscillations se présentent toutes les fois que la fonction $\varphi(n)$ croît plus vite qu'une certaine expression, et elles deviennent plus sensibles à mesure que le degré de croissance de $\varphi(n)$ augmente.

En terminant ces applications, nous ferons remarquer qu'il est permis de supprimer, dans les séries considérées ci-dessus, des termes suivant une loi comportant beaucoup d'arbitraire, sans que les formules asymptotiques que nous avons établies cessent d'avoir lieu. Nous nous contenterons de citer comme exemple l'égalité

$$\sum_{n = n_0}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2 \log (n^2)} \right)^{n^2} = e^{(1 + \varepsilon(x)) \frac{x}{e \log x}}, \tag{55}$$

qui se déduit immédiatement des calculs de la p. 42.

19. **Relation entre l'ordre de grandeur du module maximum d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de ses coefficients.** — Soit

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{56}$$

le développement de TAYLOR d'une fonction entière, et $M(r)$ le maximum de son module sur le cercle $|x| = r$. Pour indiquer l'ordre de grandeur des coefficients c_n, nous nous servirons des définitions suivantes:

Nous dirons que $\sqrt[n]{|c_n|}$ *est d'ordre* $n^{-\rho}$, si l'on a, quelque petit que soit ε,

$$\sqrt[n]{|c_n|} < n^{-\rho+\varepsilon}$$

à partir d'un certain indice n, et en même temps

$$\sqrt[n]{|c_n|} > n^{-\rho-\varepsilon}$$

pour une infinité de valeurs n.

De même, nous dirons que $\sqrt[n]{|c_n|}$ *est d'ordre* $\left[n(\log n)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{\alpha_\nu}\right]^{-\rho}$, si, quelque petit que soit ε, l'inégalité

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \left[n(\log n)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{\alpha_\nu-\varepsilon}\right]^{-\rho}$$

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de n, et l'inégalité

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \left[n(\log n)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{\alpha_\nu+\varepsilon}\right]^{-\rho}$$

pour une infinité d'indices n.

Cela posé, les propositions établies pp. 34, 39 et 42, nous permettent d'énoncer les résultats suivants, en tenant compte des définitions données p. 26:

Si $M(r)$ *est d'ordre* e^{r^ρ}, *l'expression* $\sqrt[n]{|c_n|}$ *est d'ordre* $n^{-\frac{1}{\rho}}$, *et inversement.*

Si $M(r)$ *est d'ordre* $e^{r^\rho(\log r)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}r)^{\alpha_\nu}}$, *l'expression* $\sqrt[n]{|c_n|}$ *est d'ordre* $\left[n(\log n)^{-\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{-\alpha_\nu}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$, *et inversement.*

Mais nous pouvons préciser davantage la correspondance qui existe entre l'ordre de grandeur de $M(r)$ et celui de $\sqrt[n]{|c_n|}$. En rapprochant les inégalités (35) et (36) des inégalités (52) et (53), nous arrivons en effet à la conclusion suivante:

Si les inégalités

$$M(r) < e^{(A+\varepsilon)r^\rho(\log r)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}r)^{\alpha_\nu}}$$

et

$$M(r) > e^{(A-\varepsilon)r^\rho(\log r)^{\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}r)^{\alpha_\nu}},$$

où A *désigne une constante positive, sont vérifiées, quelque petit que soit* ε, *la première à partir d'une valeur finie de* r, *et la seconde pour une infinité de valeurs* r *dépassant toute quantité donnée, on aura*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < (1+\varepsilon)(A\,e\,\rho^{1-\alpha_1})^{\frac{1}{\rho}}\left[n(\log n)^{-\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{-\alpha_\nu}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

à partir d'une valeur finie de n, *et*

$$\sqrt[n]{|c_n|} > (1-\varepsilon)(A\,e\,\rho^{1-\alpha_1})^{\frac{1}{\rho}}\left[n(\log n)^{-\alpha_1}\cdots(\log^{(\nu)}n)^{-\alpha_\nu}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

pour une infinité d'indices n, quelque petit qu'on donne ε; la proposition réciproque a également lieu.

Il existe donc une correspondance très précise entre la grandeur du module maximum $M(r)$ d'une fonction entière et la grandeur de ses coefficients. Nous verrons dans la seconde partie de ce Mémoire, en cherchant à préciser, dans le sens indiqué par la dernière proposition, la relation qui lie l'ordre de grandeur de $M(r)$ à la densité des zéros de la fonction, combien ce problème est à la fois plus difficile et plus intéressant que celui que nous venons de résoudre.

20. **Sur la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement de Taylor.** — Toute fonction entière de genre fini ayant un ordre apparent déterminé, nous savons, d'après la première proposition établie à la page précédente, que la racine $n^{ième}$ du module du $n^{ième}$ coefficient dans le développement de TAYLOR d'une telle fonction aura également un ordre de grandeur déterminé, mesuré par une certaine puissance négative de n.

Soit inversement une série entière (56) où l'ordre de $\sqrt[n]{|c_n|}$ est égal à $n^{-\frac{1}{\rho}}$, ρ étant un nombre positif ou nul, et cherchons à déterminer, si possible, le genre et l'ordre réel de la fonction entière représentée par cette série. Nous aurons à distinguer deux cas:

1:o *Le nombre ρ n'est pas entier.* — Dans ce cas la réponse est immédiate. En effet, d'apres n° 19, $M(r)$ est d'ordre e^{r^ρ}, et par suite nous pouvons conclure du théorème établi p. 20, que *l'ordre réel de la fonction* (56) *est égal à ρ et son genre p égal au nombre entier immédiatement inférieur à ρ.*

2:o *ρ est un entier positif* (si $\rho = 0$, le genre et l'ordre réel de la fonction (56) sont évidemment tous les deux égaux à zéro). — Le théorème que nous venons de citer montre qu'il y a dans ce cas indétermination relativement au genre p, qui peut être égal à ρ ou à $\rho - 1$. Si $p = \rho - 1$, la dernière proposition du n° 15 nous donne $\lim n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, lorsque n tend vers l'infini. Nous en tirons cette conclusion:

Si $\sqrt[n]{|c_n|}$ est d'ordre $n^{-\frac{1}{\rho}}$, ρ étant un entier positif, et si $n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}$ ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers l'infini, le genre de la fonction (56) *est certainement égal à ρ.*

C'est là le seul résultat relatif au cas où ρ est entier, qu'on ait obtenu jusqu'à présent. Le théorème du n° 6 nous permettra d'aller plus loin en démontrant cette nouvelle proposition ($a_1, a_2, \cdots$ désignent les zéros successifs de la fonction (56)):

Si $\sqrt[n]{|c_n|}$ est d'ordre $n^{-\frac{1}{\rho}}$, et si en outre la condition

$$\lim_{n=\infty} n^{\rho} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \tag{57}$$

est vérifiée, le genre de la fonction (56) *est égal à* $\rho - 1$ *toutes les fois que la série* $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho}$ *converge, ce qui aura lieu par exemple dans les cas où l'on peut trouver un entier* ν *et un nombre* $\alpha > 1$ *tels qu'on ait, pour* n *suffisamment grand,*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \left[n \log n \cdots \log^{(\nu-1)} n \, (\log^{(\nu)} n)^{\alpha} \right]^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{58}$$

La démonstration est immédiate. En effet, puisque la série $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho}$ est supposée convergente, nous pouvons mettre la fonction donnée sous la forme

$$f(x) = e^{G(x)} \prod_{1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, \rho - 1 \right),$$

$G(x)$ étant une fonction entière. Or, le théorème du n° 6 nous apprend que, ε étant donné aussi petit qu'on voudra, il existe une infinité de cercles ayant l'origine comme centre et de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels est vérifiée l'inégalité

$$\left| \prod_{1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, \rho - 1 \right) \right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2} r^{\rho}},$$

et d'autre part le théorème de la p. 39 nous permet de conclure de l'égalité (57) qu'on a

$$|f(x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2} r^{\rho}},$$

dès que r dépassera une certaine limite. Sur tous ceux des cercles envisagés dont les rayons dépasseront cette même limite, on aura donc

$$|e^{G(x)}| < e^{\varepsilon r^{\rho}}$$

ou bien

$$\text{partie réelle de } G(x) < \varepsilon r^{\rho},$$

et par suite, d'après n° 10, nous pouvons affirmer que $G(x)$ se réduit à un polynôme de degré inférieur ou égal à $\rho - 1$, de sorte que le genre de la fonction $f(x)$ est bien égal à $\rho - 1$.

La seconde partie de la proposition énoncée ci-dessus est une conséquence immédiate des théorèmes établis p. 42 et p. 21. En effet, en vertu de l'inégalité (58), le premier de ces théorèmes nous donne

$$M(r) < \frac{1+\varepsilon}{e\rho^2} r^{\rho} (\log r)^{-1} \cdots (\log^{(\nu-1)} r)^{-1} (\log^{(\nu)} r)^{-\alpha}$$

à partir d'une certaine valeur de r, et nous pouvons donc conclure du second théorème que les zéros de la fonction (56) vérifient l'inégalité

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[n\log n\cdots\log^{(\nu-1)}n\,(\log^{(\nu)}n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

à partir d'un certain indice n. Donc, l'inégalité (58) entraîne bien la convergence de la série $\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho}$.

Le théorème que nous venons de démontrer pourrait facilement suggérer l'idée que la convergence de la série

$$\sum_0^{\infty}\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{\rho}, \tag{59}$$

jointe à l'hypothèse (57) fournit une condition suffisante, ou même la condition nécessaire et suffisante pour que le genre de la fonction entière (56) ne dépasse pas $\rho-1$ [1]). En ce qui concerne la première supposition, nous pouvons dire seulement qu'il paraît peu probable qu'elle soit exacte, pour des raisons que nous expliquerons plus loin. Mais ce qui est certain, et ce que nous démontrerons dans la seconde partie de ce Mémoire, c'est qu'il existe des fonctions entières de genre $\rho-1$ telles que la série (59) diverge. Le problème de la détermination du genre d'une fonction entière donnée par son développement de TAYLOR est donc d'une difficulté beaucoup plus grande qu'on ne se l'est imaginé jusqu'à présent.

---

[1]) Cf. page 203 du Mémoire de M. HADAMARD.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE IV.

EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINS PRODUITS INFINIS.

21. **Représentation de la dérivée logarithmique au moyen d'une intégrale définie.** — Soit le produit canonique de genre p

$$(1) \qquad f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{a_n}\right) e^{-\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 - \cdots + \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\} \equiv \prod_{n_0}^{\infty} E\left(-\frac{x}{a_n}, p\right),$$

où a_n est donné par l'expression

$$a_n = a(n) \equiv \left[A\, n\, (\log n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

A, ρ et α désignant des nombres réels, dont les deux premiers sont positifs. Le nombre ρ est d'ailleurs assujetti aux conditions $p \leq \rho \leq p+1$. Lorsque ρ n'est pas entier, le nombre α pourra avoir une valeur quelconque. On aura, au contraire, $\alpha > 1$ si $\rho = p+1$, et $\alpha \leq 1$ si $\rho = p$, puisque les séries $\sum\left(\frac{1}{a_n}\right)^{p+1}$ et $\sum\left(\frac{1}{a_n}\right)^{p}$ doivent être respectivement convergente et divergente. Quant à l'entier n_0, on le suppose suffisamment grand pour que la fonction $a(n)$ soit continue et croissante pour $n \geq n_0$.

Dans les raisonnements qui suivent, on admettra constamment que l'argument de la variable $x \equiv re^{i\varphi}$ garde une valeur constante quelconque *comprise entre* $-\pi$ *et* $+\pi$, le module r pouvant au contraire varier comme on le voudra. Conformément

à la notation de la p. 20, on désignera par $\varepsilon(x)$ toute fonction continue de x qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini avec un argument déterminé.

Cela posé, afin d'arriver à une expression asymptotique du produit (1), nous allons considérer sa dérivée logarithmique, qui s'écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-1)^p x^p \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{[a(n)]^p [x + a(n)]}.$$

On constate immédiatement que les parties réelle et imaginaire de l'expression placée sous le signe Σ sont des fonctions continues de n, tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima qui, par rapport à r, sont tous des quantités d'ordre $\frac{1}{r}$. On en conclut, en vertu d'un théorème dont nous avons fait usage déjà plusieurs fois, que la somme en question peut se mettre sous la forme:

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{[a(n)]^p [x + a(n)]} = \int_{n_0}^{\infty} \frac{dn}{[a(n)]^p [x + a(n)]} + \left[\frac{1}{r}\right],$$

$\left[\frac{1}{r}\right]$ désignant ici *et dans la suite* une quantité d'ordre $\frac{1}{r}$. L'emploi de la formule sommatoire d'EULER permettrait d'ailleurs de préciser ce terme $\left[\frac{1}{r}\right]$, mais nous n'en aurons pas besoin.

Si maintenant nous posons

$$t = a(n) = \left[A n (\log n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

d'où il suit, en différentiant,

$$dn = \frac{1 + \varepsilon(t)}{A \rho^{\alpha - 1}} t^{\rho - 1} (\log t)^{-\alpha} dt,$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{A \rho^{\alpha - 1}} \int_{t_0}^{\infty} (1 + \varepsilon(t)) t^{\rho - p - 1} (\log t)^{-\alpha} \frac{dt}{t + x},$$

où $t_0 = a(n_0)$, et par suite l'expression de la dérivée logarithmique du produit donné se présentera sous la forme

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-1)^p \frac{x^p}{A \rho^{\alpha - 1}} \int_{t_0}^{\infty} (1 + \varepsilon(t)) t^{\rho - p - 1} (\log t)^{-\alpha} \frac{dt}{t + x} + \left[r^{p-1}\right], \tag{2}$$

$\left[r^{p-1}\right]$ désignant une quantité d'ordre r^{p-1}.

22. Application du théorème de Cauchy. — Nous sommes donc ramenés à l'étude des intégrales définies de la forme

$$\int_a^\infty t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x}, \tag{3}$$

où $-1 \leqq \mu \leqq 0$, et, où l'on aura $\nu < -1$ si $\mu = 0$, et $\nu \geqq -1$ si $\mu = -1$, ν pouvant avoir, au contraire, une valeur réelle quelconque lorsque μ n'est pas entier. Quant à la limite inférieure a, c'est un nombre positif quelconque, que nous supposerons seulement supérieur à l'unité.

Ayant fixé pour la variable $x = re^{i\varphi}$ une valeur telle que $-\pi < \varphi < \pi$, $r > a$, traçons de l'origine comme centre deux cercles, l'un C_a de rayon a, l'autre C_R de rayon $R > r$; puis découpons l'anneau circulaire compris entre ces cercles du point $x = a$ au point $x = R$, suivant l'axe réel. Nous désignerons par T le domaine simplement connexe ainsi obtenu, et par S son contour.

Comme la fonction $t^\mu (\log t)^\nu$ est holomorphe pour tout point du domaine T, et comme d'autre part le point $-x$ est intérieur à ce même domaine, le théorème de Cauchy nous permet d'écrire

$$\int_S t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x} = 2\pi i (-x)^\mu (\log(-x))^\nu. \tag{4}$$

l'intégrale étant prise le long du contour S dans le sens direct.

Dans cette égalité, on choisira pour les logarithmes et pour les puissances leurs déterminations *principales*, c'est à dire celles qui prennent des valeurs réelles sur l'axe réel positif.

L'angle φ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, comme il été dit, l'argument de la quantité $-x$ sera égal à $\varphi + \pi$, de sorte que le second membre de l'égalité ci-dessus s'ecrit

$$2\pi i e^{\mu\pi i} x^\mu (\log x + \pi i)^\nu.$$

L'intégrale figurant au premier membre de l'égalité (4) se compose des parties suivantes:

1° l'intégrale relative au cercle C_a, qui donne un terme $\left[\frac{1}{r}\right]$;

2° l'intégrale relative au cercle C_R; comme la fonction $t^\mu (\log t)^\nu$ s'annule à l'infini, en vertu des hypothèses admises relativement aux nombres μ et ν, cette intégrale tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini;

3° les intégrales relatives à chacun des deux bords de la coupure (a, R); la somme de ces intégrales est égale à

$$\int_a^R t^\mu \left\{(\log t)^\nu - e^{2\pi i\mu}(\log t + 2\pi i)^\nu\right\} \frac{dt}{t+x},$$

expression qui, d'après ce qu'on vient de dire, tendra nécessairement vers une limite finie et déterminée lorsque R tend vers l'infini.

On voit donc en somme que, pour $\lim R = \infty$, l'égalité (4) prend la forme suivante:

$$(5) \qquad \int_a^\infty t^\mu \left\{(\log t)^\nu - e^{2\pi i\mu}(\log t + 2\pi i)^\nu\right\} \frac{dt}{t+x} = 2\pi i e^{\mu\pi i} x^\mu (\log x + \pi i)^\nu + \left[\frac{1}{r}\right].$$

23. **Discussion de l'égalité fournie par le théorème de Cauchy.** — Dans la discussion de l'égalité (5), nous aurons à distinguer trois cas:

1°. $-1 < \mu < 0$. Le premier membre de (5) s'écrit

$$(1 - e^{2\pi i\mu}) \int_a^\infty (1 + \varepsilon(t))\, t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x}.$$

Comme le module de cette expression, d'après l'égalité dont il s'agit, est d'ordre supérieur à $\frac{1}{r}$, on trouve facilement (en observant qu'on a $\frac{1}{|t+x|} < \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}} \frac{1}{t+r}$ pour $x = re^{i\varphi}$), que la dernière intégrale peut se mettre sous la forme

$$(1 + \varepsilon(x)) \int_a^\infty t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x},$$

de sorte que, réduction faite, on obtient la formule

$$(6) \qquad \int_a^\infty t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x} = (1 + \varepsilon(x)) \frac{\pi}{\sin(\mu+1)\pi} x^\mu (\log x)^\nu.$$

2° $\mu = 0$. Le premier membre de l'égalité (5), laquelle est valable dès que $\nu < 0$, peut se mettre sous la forme

$$-2\pi i\nu \int_a^\infty (1 + \varepsilon(t))(\log t)^{\nu-1} \frac{dt}{t+x} = -2\pi i\nu (1 + \varepsilon(x)) \int_a^\infty (\log t)^{\nu-1} \frac{dt}{t+x}.$$

En changeant ν en $1-\nu$, on obtient donc la formule

$$(7) \qquad \int_a^\infty \frac{1}{(\log t)^\nu} \frac{dt}{t+x} = \frac{1 + \varepsilon(x)}{\nu - 1} \frac{1}{(\log x)^{\nu-1}},$$

qui est applicable lorsque $\nu > 1$.

3° $\mu = -1$. En développant le premier membre de (5), et en changeant ν en $\nu+1$, on trouve

$$\int_a^\infty \frac{(\log t)^\nu}{t}\,\frac{dt}{t+x} = \frac{1+\varepsilon(x)}{\nu+1}\cdot\frac{(\log x)^{\nu+1}}{x}, \tag{8}$$

formule valable pour $\nu > -1$.

Le seul cas qu'il nous reste encore à traiter est donc celui où $\mu = \nu = -1$. L'intégrale (8) s'écrit alors

$$\int_a^\infty \frac{1}{t\log t}\cdot\frac{dt}{t+x}.$$

Pour évaluer cette expression, nous partirons de la formule

$$\int_S \frac{\log\log t}{t}\,\frac{dt}{t+x} = 2\pi i\,\frac{\log\log(-x)}{(-x)},$$

le contour S étant choisi comme au n° 22. Lorsque le rayon R du cercle C_R tend vers l'infini, elle devient

$$\int_a^\infty \frac{\log\log t - \log(\log t + 2\pi i)}{t}\,\frac{dt}{t+x} = -2\pi i\,\frac{\log(\log x + \pi i)}{x} + \left[\frac{1}{r}\right],$$

et, en réduisant les deux membres, on en conclut

$$\int_a^\infty \frac{1}{t\log t}\cdot\frac{dt}{t+x} = (1+\varepsilon(x))\,\frac{\log\log x}{x}. \tag{9}$$

24. **Expressions asymptotiques des produits considérés au n° 21.** — Revenons maintenant au produit (1) et à l'expression (2) de sa dérivée logarithmique. En appliquant à cette expression, suivant les valeurs de ρ et de α, les égalités (6)—(9) du numéro précédent, et en intégrant par rapport à x, nous en déduisons les formules asymptotiques que voici:

$p < \rho < p+1$:

$$\log f(x) = (-1)^p\,\frac{\pi}{A\rho^\alpha \sin[\pi(\rho-p)]}\,x^\rho(\log x)^{-\alpha}(1+\varepsilon(x)); \tag{a}$$

$\rho = p+1$ $(\alpha > 1)$:

$$\log f(x) = (-1)^p\,\frac{1}{A\rho^\alpha(\alpha-1)}\,x^\rho(\log x)^{-\alpha+1}(1+\varepsilon(x)); \tag{b}$$

$\rho = p$, $\alpha < 1$:

$$\log f(x) = (-1)^p\,\frac{1}{A\rho^\alpha(1-\alpha)}\,x^\rho(\log x)^{-\alpha+1}(1+\varepsilon(x)); \tag{c}$$

$\rho = p$, $\alpha = 1$:

$$\log f(x) = (-1)^p\,\frac{1}{A\rho}\,x^\rho\log\log x\,(1+\varepsilon(x)). \tag{d}$$

Ces formules [1]) sont applicables tant que l'argument de la variable x garde une valeur constante quelconque comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Prenons comme exemple la fonction

$$\prod_{n_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\log n)^2}\right). \tag{10}$$

On la ramène à la forme (1) en posant $-x^2=y$, et on pourra alors appliquer la formule (a) en y faisant $A=\alpha=1$, $p=0$, $\rho=\frac{1}{2}$. On trouve ainsi, en réintégrant la variable x,

$$\prod_{n_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\log n)^2}\right)=e^{\mp\pi i\frac{x}{\log x}(1+\varepsilon(x))},$$

le signe $-$ ayant lieu au-dessus, et le signe $+$ au dessous de l'axe réel. Cette expression met en évidence que la fonction entière (10), qui est de genre un, est bien d'ordre $e^{\varepsilon r}$ (voir p. 19), comme l'a démontré M. POINCARÉ.

---

[1]) Je m'aperçois qu'on peut obtenir les formules (b), (c) et (d) par une voie plus élémentaire, que je veux indiquer rapidement.

Soit p. ex. $\rho=p$. J'observe d'abord qu'on peut trouver une constante positive A telle qu'on ait

$$\left|\log E\left(-\frac{x}{a_n},p\right)\right|<A\left|\frac{x}{a_n}\right|^{p+1} \tag{α}$$

pour toute valeur x dont l'argument φ est compris entre $-(\pi-\eta)$ et $+(\pi-\eta)$, η étant un nombre positif donné aussi petit qu'on le voudra. C'est ce qu'on trouve par un raisonnement analogue à celui du n° 2.

Cela posé, déterminons l'entier n' par la condition

$$\left[A\,n'(\log n')^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}\leqq\frac{|x|}{k}\leqq\left[A\,(n'+1)(\log(n'+1))^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

k désignant un nombre positif dont nous disposerons ultérieurement, et écrivons la fonction donnée (1) sous la forme

$$f(x)=\prod_{n_0}^{n'}E\left(-\frac{x}{a_n},p\right)\prod_{n'+1}^{\infty}E\left(-\frac{x}{a_n},p\right).$$

L'inégalité (α) nous donne d'abord (v. le calcul de la p. 23):

$$\left|\log\prod_{n'+1}^{\infty}E\left(-\frac{x}{a_n},p\right)\right|<K|x|^{\rho}(\log|x|)^{-\alpha}. \tag{β}$$

K étant une quantité positive indépendante de x qui tend vers l'infini en même temps que k.

D'autre part, comme $\left|\frac{x}{a_n}\right|\geqq k$ pour $n\leqq n'$, on aura, pour un facteur quelconque du premier produit ci-dessus,

$$\log E\left(-\frac{x}{a_n},p\right)=(-1)^{p}\frac{1+\varepsilon(k)}{p}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{p},$$

25. **Généralisations diverses.** — Les formules que nous venons d'établir sont susceptibles d'être généralisées et précisées de différentes manières. On voit d'abord immédiatement qu'on peut appliquer les considérations qui précèdent aux produits (1) dont les zéros sont donnés par une expression quelconque de la forme

$$a_n = \left[A n (\log n)^{\alpha_1} (\log^{(2)} n)^{\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Lorsque $p < \rho < p+1$, on obtient par exemple

$$\log f(x) = (-1)^p \frac{\pi}{A \rho^\rho \sin\left[\pi(\rho - p)\right]} x^\rho (\log x)^{-\alpha_1} (\log^{(2)} x)^{-\alpha_2} \cdots (\log^{(\nu)} x)^{-\alpha_\nu}.$$

Mais voici une remarque plus importante. Nous avons déduit les formules en question de l'égalité (5), en y réduisant les deux membres à leurs parties principales. Développons maintenant, dans cette même égalité, les expressions $(\log t + 2\pi i)^\nu$ et $(\log x + \pi i)^\nu$ resp. suivant les puissances descendantes de $\log t$ et de $\log x$; en divisant par $2\pi i e^{\mu\pi i}$, puis en égalant des deux côtés les termes dont les coefficients sont réels, nous obtenons ainsi, dans le cas où μ n'est pas entier, une équation dont les premiers termes s'écrivent

$$\frac{\sin(\mu+1)\pi}{\pi} \int_a^\infty t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x} - \nu \cos \mu\pi \int_a^\infty t^\mu (\log t)^{\nu-1} \frac{dt}{t+x}$$

$$+ \nu(\nu-1)\pi \sin \mu\pi \int_a^\infty t^\mu (\log t)^{\nu-2} \frac{dt}{t+x} + \cdots$$

$$= x^\mu (\log x)^\nu \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} \frac{\pi^2}{(\log x)^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \frac{\pi^4}{(\log x)^4} - \cdots\right] + \left[\frac{1}{r}\right].$$

---

d'où il suit

$$(\gamma) \qquad \log \prod_{n_0}^{n'} E\left(-\frac{x}{a_n}, p\right) = (-1)^p \frac{1+\varepsilon(k)}{p} x^\rho \sum_{n_0}^{n'} \left(\frac{1}{a_n}\right)^p.$$

Or on a

$$\sum_{n_0}^{n'} \left(\frac{1}{a_n}\right)^p = \frac{1+\varepsilon(n')}{A} \int_{n_0}^{n'} \frac{dn}{n (\log n)^\alpha},$$

et cette dernière expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{1+\varepsilon(x)}{A(1-\alpha)\rho^{\alpha-1}} (\log x)^{-\alpha+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon(x)}{A} \log\log x,$$

suivant qu'on a $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$.

En prenant d'abord le nombre k très grand, de sorte que, dans l'égalité (γ), la quantité $\varepsilon(k)$ soit très petite, et en donnant ensuite à $|x|$ une valeur assez grande pour que l'expression (β) soit très petite par rapport au module de l'expression (γ), on voit bien qu'on retrouve les formules (c) et (d) du texte.

N:o 1.

En remplaçant dans cette égalité le nombre ν successivement par $\nu-1, \nu-2, \cdots, \nu-n$, et en résolvant toutes ces équations par rapport à l'intégrale qui figure au premier terme de l'équation écrite ci-dessus, nous trouvons pour cette intégrale un développement asymptotique de la forme

$$(11)\quad \int_a^\infty t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x} = \frac{\pi}{\sin(\mu+1)\pi} x^\mu (\log x)^\nu \left\{1 + \frac{A_1}{\log x} + \frac{A_2}{(\log x)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(\log x)^n}(1+\varepsilon(x))\right\},$$

où $A_1, A_2, \cdots$ désignent des constantes faciles à calculer. On aura p. ex.

$$A_1 = -\nu\pi \operatorname{cotg} \mu\pi, \quad A_2 = \frac{\nu(\nu-1)}{2}\pi^2(1+2\operatorname{cotg}^2\mu\pi), \cdots$$

Dans cette formule l'entier n peut être pris aussi grand qu'on le voudra, et le symbole $\varepsilon(x)$ a la signification indiquée p. 50.

A l'aide de la formule (11) et des formules analogues qu'on obtient dans les cas où μ est égal à 0 ou à -1, on peut évidemment préciser beaucoup les résultats du n° 24. Soit comme exemple la fonction suivante de genre 0:

$$f(x) = \Pi\left(1 + \frac{x}{a_n}\right),$$

où

$$a_n = \left[An(\log n + \beta \log\log n + \log B)^\alpha\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\rho < 1).$$

En remplaçant d'abord la dérivée logarithmique par une intégrale définie (par le même calcul qu'au n° 21, mais en poussant l'approximation un peu plus loin), puis en appliquant la formule (11), on trouve pour cette fonction la formule asymptotique:

$$\log f(x) = \frac{\pi}{A\rho^\alpha \sin\pi\rho} \frac{x^\rho}{(\log x)^\alpha}\left\{1 + K\frac{\log\log x}{\log x} + \frac{L(1+\varepsilon(x))}{\log x}\right\},$$

où

$$K = \frac{\alpha}{\rho}(\alpha-\beta), \quad L = \frac{\alpha}{\rho}\left\{(\alpha-\beta)\log\rho + \pi\rho\operatorname{cotg}\pi\rho + \log\frac{A}{B}\right\}.$$

$\varepsilon(x)$ étant de l'ordre de $\dfrac{(\log\log x)^2}{\log x}$.

26. **Expressions asymptotiques de certaines intégrales définies.** — Nous aurons besoin dans la suite d'une expression asymptotique de l'intégrale

$$(12)\quad \int_a^R t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x}$$

pour les grandes valeurs positives de R, les nombres μ et ν étant assujettis aux conditions énoncées au début du n° 22. A cet effet, nous partirons de l'égalité suivante, qu'on vérifie de suite en différentiant:

$$\int_a^R \frac{t^{\mu+k}(\log t)^\nu}{(t+x)^{k+1}}\,dt - \frac{k+1}{\mu+k+1}\int_a^R \frac{t^{\mu+k+1}(\log t)^\nu}{(t+x)^{k+2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\mu+k+1}\left[\frac{t^{\mu+k+1}(\log t)^\nu}{(t+x)^{k+1}}\right]_a^R - \frac{\nu}{\mu+k+1}\int_a^R \frac{t^{\mu+k}(\log t)^{\nu-1}}{(t+x)^{k+1}}\,dt.$$

Écrivons cette égalité en donnant à k successivement les valeurs $0, 1, 2, \cdots, n-1$, puis ajoutons les équations obtenues après les avoir multipliées respectivement par

$$1, \frac{1}{\mu+1}, \frac{1\cdot 2}{(\mu+1)(\mu+2)}, \cdots\cdots, \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n-1)}.$$

Il en résulte pour l'intégrale (12) l'expression que voici:

$$(13)\quad \left[P\frac{t^{\mu+1}(\log t)^\nu}{(\mu+1)(t+x)}\right]_a^R - \frac{\nu}{\mu+1}\int_a^R P\frac{t^\mu(\log t)^{\nu-1}}{t+x}\,dt + \frac{1\cdot 2\cdots n}{(\mu+1)\cdots(\mu+n)}\int_a^R \frac{t^{\mu+n}(\log t)^\nu}{(t+x)^{n+1}}\,dt,$$

où P designe la somme suivante:

$$P = 1 + \frac{1}{\mu+2}\left(\frac{t}{t+x}\right) + \frac{1\cdot 2}{(\mu+2)(\mu+3)}\left(\frac{t}{t+x}\right)^2 + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{(\mu+2)\cdots(\mu+n)}\left(\frac{t}{t+x}\right)^{n-1}.$$

Or on a, en supposant x réel et positif,

$$\int_a^R \frac{t^{\mu+n}(\log t)^\nu}{(t+x)^{n+1}}\,dt < \left(\frac{R}{R+x}\right)^{n+1}\int_a^R t^{\mu-1}(\log t)^\nu\,dt,$$

inégalité qui montre que le dernier terme de l'expression (13), pour $x>0$, tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Donc, en désignant comme d'habitude par $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ la série hypergéométrique

$$(14)\qquad 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,$$

et en faisant tendre n vers l'infini dans l'expression (13), nous obtenons enfin pour l'intégrale (12) cette égalité:

$$\int_a^R t^\mu(\log t)^\nu\frac{dt}{t+x} = \frac{1}{\mu+1}\left[\frac{t^{\mu+1}(\log t)^\nu}{t+x}F\left(1,1,\mu+2,\frac{t}{t+x}\right)\right]_{t=a}^{t=R}$$

$$-\frac{\nu}{\mu+1}\int_a^R \frac{t^\mu(\log t)^{\nu-1}}{t+x}F\left(1,1,\mu+2,\frac{t}{t+x}\right)dt.$$

Comme la fonction représentée par la série (14) n'a d'autres points singuliers que $1, \infty$ et 0, l'égalité que nous venons d'écrire, malgré la restriction imposée

primitivement à x, subsistera dans tout le plan, excepté l'origine et le segment $-a \text{---} -R$ de l'axe réel négatif.

Supposons en particulier qu'on ait $x < -\sigma R$ ou $x > \sigma' R$, σ et σ' étant des nombres positifs, dont $\sigma > 1$. Dans les deux cas, la fonction

$$F\left(1, 1, \mu+2, \frac{t}{t+x}\right)$$

restera inférieure en valeur absolue à une quantité fixe pour les valeurs t comprises entre 0 et R, et cela quelque grand que soit R. Le dernier terme de l'égalité ci-dessus sera donc, pour les grandes valeurs de R, infiniment petit par rapport au premier membre, et par suite nous pourrons en tirer, pour l'intégrale donnée (12), l'expression asymptotique que voici:

$$(15) \qquad \int_a^R t^\mu (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x} = \frac{1}{\mu+1} \frac{R^{\mu+1} (\log R)^\nu}{R+x} F\left(1, 1, \mu+2, \frac{R}{R+x}\right) (1+\varepsilon(R)).$$

Cette formule n'est plus applicable lorsque $\mu = -1$. Mais de l'identité

$$\int_a^R \frac{(\log t)^\nu}{t} \frac{dt}{t+x} = \frac{1}{x} \int_a^R \frac{(\log t)^\nu}{t} dt - \frac{1}{x} \int_a^R (\log t)^\nu \frac{dt}{t+x}$$

on conclut immédiatement, en appliquant au dernier terme la formule (15), qu'on a

$$(16) \qquad \int_a^R \frac{(\log t)^\nu}{t} \frac{dt}{t+x} = \frac{1+\varepsilon(R)}{\nu+1} \cdot \frac{(\log R)^{\nu+1}}{x}$$

pour $\nu > -1$, et, pour $\nu = -1$:

$$(17) \qquad \int_a^R \frac{1}{t \log t} \frac{dt}{t+x} = (1+\varepsilon(R)) \frac{\log\log R}{x}.$$

Pour terminer, nous ferons remarquer qu'on peut tirer de l'égalité (15), par une discussion facile, la formule (6) du n° 23, en se servant de la relation

$$F(1, 1, \mu+2, x) = \frac{\mu+1}{\mu} F(1, 1, 1-\mu, 1-x) + \frac{\pi(\mu+1)}{\sin[\pi(\mu+1)]} \frac{(1-x)^\mu}{x^{\mu+1}},$$

qu'on obtient en spécialisant une formule fondamentale de la théorie de la série hypergéométrique (formule II, p. 8, de notre Mémoire: *Sur l'intégration de l'équation différentielle de Kummer*, t. XIX de la présente série de publications).

CHAPITRE V.

APPLICATION DES RÉSULTATS DU CHAPITRE PRÉCÉDENT A LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS ENTIERES.

27. **Recherche d'une limite supérieure précise du module maximum d'une fonction entière, étant donnée une limite inférieure des modules de ses zéros.** -- Considérons une fonction entière canonique dont les zéros sont assujettis à la seule condition:

$$|a_n| \geq a(n) = \left[n (\log n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{18}$$

et proposons-nous d'évaluer une limite supérieure aussi précise que possible de son module maximum $M(r)$.

La solution de ce problème est immédiate dans le cas d'une fonction de genre zéro. En effet, on aura alors

$$M(r) \leq \prod \left(1 + \frac{r}{a(n)}\right),$$

et, d'après les formules du n° 24, cette inégalité s'écrit:

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon(r)}{\rho^{\alpha}} \frac{\pi}{\sin \pi \rho} r^{\rho} (\log r)^{-\alpha}}$$

lorsque ρ est inférieur à l'unité, et, pour $\rho = 1$:

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon(r)}{\alpha - 1} r (\log r)^{-\alpha+1}}$$

Ces limites sont d'ailleurs bien précises, puisqu'elles sont respectivement atteintes pour les fonctions

$$\prod \left\{1 + \frac{x}{\left[n (\log n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right\} \quad \text{et} \quad \prod \left\{1 + \frac{x}{n (\log n)^{\alpha}}\right\}.$$

Pour les fonctions de genre supérieur à zéro, la solution du problème dont il s'agit est bien plus compliquée. Aussi nous bornerons nous ici aux fonctions de genre *un*:

$$f(x)=\prod_{n_0}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}}\right\}. \tag{19}$$

Cherchons d'abord le maximum du module de l'expression

$$E(u,1)\equiv(1-u)e^{u}$$

sur la circonférence décrite de l'origine comme centre avec un rayon arbitraire ρ.

En posant $u=\rho e^{i\psi}$, on trouve

$$|E(u,1)|=\sqrt{1-2\rho\cos\psi+\rho^2}\,e^{\rho\cos\psi},$$

et, en égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à ψ, il vient:

$$\sin\psi(\rho-2\cos\psi)=0,$$

équation qui admet les racines $\psi=0$, $\psi=\pi$ et $\psi=\arccos\frac{\rho}{2}$, dont la dernière n'est réelle que tant que $\rho\leq 2$.

Une discussion facile montre que le maximum cherché correspond à la racine $\psi=0$ lorsque $\rho>2$, et à la racine $\psi=\arccos\frac{\rho}{2}$ lorsque $\rho<2$, et que sa valeur est dans le premier cas égale à $(\rho-1)e^{\rho}$, et dans le second cas à $e^{\frac{\rho^2}{2}}$.

Il s'agit maintenant de disposer les zéros a_n conformément à la condition (18), de telle sorte que pour une valeur donnée de x, que nous supposerons d'ailleurs réelle et positive, le module de la fonction (19) soit aussi grand que possible.

Posons $u=\frac{x}{a_n}=\rho e^{i\psi}$, d'où il suit $\rho=\frac{x}{|a_n|}$. Comme le maximum de $|E(u,1)|$ sur le cercle $|u|=\rho$ est une fonction croissante de ρ, on voit d'abord qu'il faudra rendre les modules des zéros aussi petits que possible, condition qu'on réalise en faisant $|a_n|=a(n)$ pour tout indice n. D'autre part, il suit de la discussion qui précède que, lorsque $\rho>2$, c'est à dire pour les indices n tels que $|a_n|=a(n)<\frac{x}{2}$, on doit prendre $\psi=0$ et par suite a_n réel et positif, tandis que, pour $\rho<2$ ou $a(n)>\frac{x}{2}$, on doit choisir l'angle ψ de telle sorte qu'on ait $\rho=2\cos\psi$ ou bien $|a_n|\cos\psi=\frac{x}{2}$, égalité qui exprime, en langage géométrique, que le point a_n est situé sur la perpendiculaire à l'axe réel passant par le point $\frac{x}{2}$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que la plus grande valeur que puisse atteindre, au point considéré x, le module d'une fonction (19) dont les zéros sont assujettis à la condition (18), est donnée par l'expression

$$\prod_{n_0}^{n'} \left| \left(\frac{x}{a(n)} - 1 \right) e^{\frac{x}{a(n)}} \right| \cdot e^{\frac{x^2}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{|a(n)|^2}}, \tag{20}$$

où l'entier n' est déterminé par les inégalités

$$a(n') \leq \frac{x}{2} < a(n'+1), \tag{21}$$

$a(n)$ ayant la signification indiquée au début de ce numéro.

Un calcul facile nous donne pour la somme $\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{|a(n)|^2}$ la valeur

$$\frac{1+\varepsilon(x)}{(2-\rho)\,2^{\rho-2}\,\rho^{\alpha-1}} x^{\rho-2} (\log x)^{-\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon(x)}{\rho^{\alpha-1}(\alpha-1)} (\log x)^{-\alpha+1},$$

suivant qu'on a $\rho < 2$ ou $\rho = 2$, de sorte que le logarithme du second facteur de l'expression (20), suivant que l'un ou l'autre de ces cas se présente affecte la forme

$$\frac{1+\varepsilon(x)}{(2-\rho)\,2^{\rho-1}\,\rho^{\alpha-1}} x^{\rho} (\log x)^{-\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon(x)}{\rho^{\alpha}(\alpha-1)} x^{\rho} (\log x)^{-\alpha+1}.$$

Pour évaluer le premier facteur de l'expression (20), posons

$$F(y) = \prod_{n_0}^{n''} \left| \left(\frac{y}{a(n)} - 1 \right) e^{\frac{y}{a(n)}} \right|,$$

l'entier n'' étant déterminé, pour une valeur donnée quelconque de y, par les inégalités $a(n'') \leq \frac{y}{2} < a(n''+1)$, et faisons croître y d'une manière continue depuis la valeur $y_0 = 2\,a(n_0)$ jusqu'à la valeur considérée de x. L'expression $F(y)$ ira constamment en croissant et fera un saut brusque chaque fois que $\frac{y}{2}$ passera par une valeur $a(n)$, puisqu'en ce moment un nouveau facteur vient s'y joindre. La valeur initiale $\left(\text{pour } \frac{y}{2} = a(n)\right)$ de ce facteur étant égale à e^2, on voit que $\log F(y)$ est une fonction constamment croissante qui subit un saut brusque de deux unités chaque fois que $\frac{y}{2}$ passe par une valeur $a(n)$, et comme $\log F(y_0) = 2$, on obtient donc

$$\log F(y) = 2(n'' - n_0 + 1) + \int_{y_0}^{y} \frac{F'(y)}{F(y)}\, dy,$$

et en particulier, pour $y = x$.

$$\log \prod_{n_0}^{n'} \left\{ \left(\frac{x}{a(n)} - 1 \right) e^{\frac{x}{a(n)}} \right\} = 2(n' - n_0 + 1) + \int_{y_0}^{x} \frac{F'(y)}{F(y)} dy .$$

Les inégalités (21) nous donnent d'abord

$$2n' = \frac{1 + \varepsilon(x)}{2^{\rho-1}\rho^{\alpha}} x^{\rho} (\log x)^{-\alpha},$$

expression qui représentera également le premier terme du second membre de l'égalité ci-dessus.

D'autre part, en procédant comme au n° 21, nous pourrons mettre la dérivée logarithmique du produit $F'(y)$ sous la forme:

$$\frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{1 + \varepsilon(y)}{\rho^{\alpha - 1}} y \int_{\frac{y_0}{2}}^{\frac{y}{2}} t^{\rho-2} (\log t)^{-\alpha} \frac{dt}{y - t}.$$

D'après n° 26, l'intégrale définie qui figure dans cette expression peut s'écrire:

$$(1 + \varepsilon(y)) \frac{F(1, 1, \rho, -1)}{2^{\rho-2}(\rho - 1)} y^{\rho-2} (\log y)^{-\alpha}$$

si ρ est supérieur à un, et pour $\rho = 1$:

$$\frac{1 + \varepsilon(y)}{1 - \alpha} y^{-1} (\log y)^{-\alpha+1} \quad \text{ou} \quad (1 + \varepsilon(y)) y^{-1} \log\log y ,$$

suivant qu'on a $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$, et par suite l'intégrale $\int_{y_0}^{x} \frac{F'(y)}{F(y)} dy$ devient, dans le premier cas:

$$(1 + \varepsilon(x)) \frac{F(1, 1, \rho, -1)}{2^{\rho-2}\rho^{\alpha}(\rho - 1)} x^{\rho} (\log x)^{-\alpha},$$

et dans les deux derniers cas respectivement

$$\frac{1 + \varepsilon(x)}{1 - \alpha} x (\log x)^{-\alpha+1} \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon(x)) x \log\log x .$$

En réunissant tous ces résultats, on trouve que l'expression (20), suivant les valeurs de ρ et de α, peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$e^{(1 + \varepsilon(x)) K x^{\rho} (\log x)^{-\alpha}} \quad \text{pour} \quad 1 < \rho < 2 ,$$

$$e^{\frac{1 + \varepsilon(x)}{\rho^{\alpha}(\alpha - 1)} x^{\rho} (\log x)^{-\alpha+1}} \quad \text{pour} \quad \rho = 2, (\alpha > 1) ,$$

$$e^{\frac{1 + \varepsilon(x)}{1 - \alpha} x (\log x)^{-\alpha+1}} \quad \text{pour} \quad \rho = 1, \alpha < 1 ,$$

$$e^{(1 + \varepsilon(x)) x \log\log x} \quad \text{pour} \quad \rho = 1, \alpha = 1 .$$

Dans la première expression on a écrit, pour abréger,

$$K = \frac{1}{2^{\rho-2}\rho^{\alpha}(2-\rho)} + \frac{F(1,1,\rho,-1)}{2^{\rho-2}\rho^{\alpha}(\rho-1)}. \tag{22}$$

Ces mêmes expressions donnent, lorsqu'on y remplace x par r, des limites supérieures pour le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière quelconque de genre *un* dont les zéros vérifient la condition (18). Et ces limites sont bien précises, c'est à dire que, en supposant p. ex. $1<\rho<2$, on pourra disposer les zéros a_n conformément à la condition (18), de telle sorte que l'inégalité

$$M(r) > e^{(K-\varepsilon)r^{\rho}(\log r)^{\alpha}}$$

sera vérifiée pour des valeurs r indéfiniment croissantes, quelque petit que soit le nombre positif ε.

28. **Retour sur les inégalités fournies par le théorème de M. Jensen.** — Étant donnée une fonction entière quelconque $f(x)$ dont le module maximum $M(r)$ est assujetti à la condition

$$M(r) < e^{r^{\rho}(\log r)^{\alpha}} \tag{23}$$

à partir d'une certaine valeur de r, nous savons, d'après n^os^ 9 et 12, que les zéros de cette fonction vérifient l'inégalité

$$\sqrt[n]{|a_1 a_2 \cdots a_n|} > (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{24}$$

et par suite aussi, à plus forte raison, l'inégalité

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{25}$$

dès que l'indice n dépassera une certaine limite, quelque petit que soit le nombre positif ε.

Il n'est pas sans intérêt de faire voir que l'inégalité (25), bien qu'elle ait été obtenue par des approximations en apparence assez grossières, n'en est pas moins la plus précise qu'on puisse assigner, tant qu'on ne fait sur la fonction $f(x)$ d'autres hypothèses que celle exprimée par l'inégalité (23). Il nous suffira évidemment de montrer qu'on peut former une fonction entière telle qu'on ait d'une part

$$|a_n| < \left[\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{26}$$

pour une infinité d'indices n, et d'autre part, quelque petit que soit ε,

$$M(r) < e^{(1+\varepsilon)r^{\rho}(\log r)^{\alpha}} \tag{27}$$

pour les valeurs suffisamment grandes de r.

Choisissons une suite indéfinie de nombres entiers positifs $n_1, n_2, n_3, \cdots$, tels qu'on ait

$$\lim_{\nu=\infty}\left[\frac{n_\nu}{\log n_\nu} : \sum_{i=1}^{\nu-1} n_i\right] = \infty, \tag{28}$$

et posons

$$R_\nu = \left[\frac{\rho}{e}^{\alpha-1} n_\nu (\log n_\nu)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{29}$$

Nous allons démontrer que la fonction entière

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty}\left\{1 + \left(\frac{x}{R_i}\right)^{n_i}\right\}$$

satisfait aux conditions énoncées tout à l'heure.

En posant $k_\nu = \sum_1^\nu n_i$, nous avons d'abord, pour ν suffisamment grand,

$$|a_{k_\nu}| = R_\nu = \left[\frac{\rho}{e}^{\alpha-1} n_\nu (\log n_\nu)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} < \left[\frac{\rho}{e}^{\alpha-1} k_\nu (\log k_\nu)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

ce qui prouve que la condition (26) est bien vérifiée pour une infinité de valeurs de l'indice n.

Soit maintenant $R_\nu < r < R_{\nu+1}$, et écrivons $M(r)$ sous la forme:

$$M(r) = \left(\prod_{i=1}^{\nu-1}\left\{1 + \left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i}\right\}\right)\cdot\left(1 + \left(\frac{r}{R_\nu}\right)^{n_\nu}\right)\cdot\left(\prod_{\nu+1}^{\infty}\left\{1 + \left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i}\right\}\right).$$

Le premier produit du second membre est inférieur à $r^{\sum_1^{\nu-1} n_i}$ si l'on a pris ν et par suite r suffisamment grand. Or l'hypothèse (28) nous permet d'écrire $\sum_1^{\nu-1} n_i = \varepsilon(\nu)\frac{n_\nu}{\log n_\nu}$, et d'autre part l'égalité (29) nous donne

$$\frac{n_\nu}{\log n_\nu} = (1 + \varepsilon(\nu))\, e R_\nu^\rho (\log R_\nu)^{\alpha-1} < (1 + \varepsilon(\nu))\, e\, r^\rho (\log r)^{\alpha-1},$$

de sorte qu'il vient, pour $r > R_\nu$,

$$\prod_{i=1}^{\nu-1}\left\{1 + \left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i}\right\} < r^{\varepsilon(r)\, r^\rho (\log r)^{\alpha-1}} = e^{\varepsilon(r)\, r^\rho (\log r)^\alpha}.$$

Le dernier facteur de $M(r)$ vérifie, pour $r < R_{\nu+1}$, l'inégalité

$$\prod_{\nu+1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i}\right\} < 2\left\{\left(1+\left(\frac{R_{\nu+1}}{R_{\nu+2}}\right)^{n_{\nu+2}}\right)\left(1+\left(\frac{R_{\nu+1}}{R_{\nu+3}}\right)^{n_{\nu+3}}\right)\cdots\right\},$$

dont le second membre tend rapidement vers 2 lorsque ν augmente.

Reste le second facteur de $M(r)$. En l'écrivant:

$$1+\left(\frac{r}{R_\nu}\right)^{n_\nu} = e^{\psi(r)\, r^\rho (\log r)^\alpha},$$

on trouve, par un calcul facile, que l'expression

$$\psi(r) \equiv \frac{\log\left\{1+\left(\frac{r}{R_\nu}\right)^{n_\nu}\right\}}{r^\rho (\log r)^\alpha}$$

atteint son maximum pour $r = (1+\varepsilon(\nu))\, e^{\frac{1}{\rho}} R_\nu$, et que ce maximum est égal à

$$\frac{1+\varepsilon(\nu)}{e\rho}\,\frac{n_\nu}{R_\nu^\rho (\log R_\nu)^\alpha},$$

expression qui, en vertu de l'égalité (29), se réduit simplement à $1+\varepsilon(\nu)$.

Nous arrivons donc à ce résultat qu'on a

$$M(r) < e^{(1+\varepsilon(\nu))\, r^\rho (\log r)^\alpha}$$

pour $R_\nu < r < R_{\nu+1}$, et que par suite l'inégalité (27) est vérifiée à partir d'une certaine valeur de r, quelque petit que soit ε.

Il est donc prouvé que, dans les conditions où nous nous sommes placés, la limite (25) est bien la plus précise qu'on puisse assigner.

29. **Suite de la discussion précédente; cas où les zéros sont assujettis à certaines inégalités.** — Soit encore $f(x)$ une fonction entière dont le module maximum est assujetti à la condition (23); mais supposons en outre qu'on sache que les zéros de cette fonction, à partir d'un certain indice n_0, vérifient les inégalités

$$(30) \qquad \left[A\, n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} < |a_n| < \left[B\, n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

A et B étant deux constantes positives. Nous allons voir que, dans ces conditions, on peut, de l'inégalite (24), en tirer une autre qui est plus précise que l'inégalité (25).

Après avoir fixé l'indice $n > n_0$ et d'ailleurs aussi grand qu'on voudra, déterminons le nombre n' par la condition

$$A\, n (\log n)^{-\alpha} = B\, n' (\log n')^{-\alpha},$$

et désignons par n_1 le plus grand entier compris dans n'. On aura:

$$n_1 = \frac{A}{B} n (1 + \varepsilon (n)).$$

Cela posé, considérons l'expression $|a_1 a_2 \cdots a_n|$, en l'écrivant:

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_n|^n \left\{ \left| \frac{a_1}{a_n} \cdots \frac{a_{n_0}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+1}}{a_n} \cdots \frac{a_{n_1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_1+1}}{a_n} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}.$$

On voit immédiatement que le troisième facteur entre crochets est inférieur à l'unité, et que la racine $n^{ième}$ du premier facteur tend vers l'unité lorsque n tend vers l'infini. D'autre part, les hypothèses admises ci-dessus nous donnent

$$\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_n} \cdots \frac{a_{n_1}}{a_n} \right| < \frac{\prod_{n_0+1}^{n_1} \left[\nu (\log \nu)^{-\alpha} \right]^{\frac{1}{\rho}}}{\left[n' (\log n')^{-\alpha} \right]^{\frac{n_1 - n_0}{\rho}}} = M \frac{\prod_{n_0+1}^{n_1} \left[\nu (\log \nu)^{-\alpha} \right]^{\frac{1}{\rho}}}{\left[n_1 (\log n_1)^{-\alpha} \right]^{\frac{n_1}{\rho}}},$$

M désignant une quantité dont la racine $n^{ième}$ tend vers l'unité pour $\lim n = \infty$. Or on trouve

$$\prod_{n_0+1}^{n_1} \left(\nu^{\frac{1}{\rho}} \right) = n_1^{\frac{n_1}{\rho}} e^{-\frac{n_1}{\rho}} (1 + \varepsilon (n_1)),$$

$$\prod_{n_0+1}^{n_1} \left((\log \nu)^{-\frac{\alpha}{\rho}} \right) = (\log n_1)^{-\frac{\alpha n_1}{\rho}} e^{n_1 \varepsilon (n_1)},$$

de sorte que la dernière expression ci-dessus devient

$$M e^{-\frac{n_1}{\rho} (1 + \varepsilon (n_1))} = M e^{-\frac{A}{B} \frac{n}{\rho} (1 + \varepsilon (n))}.$$

De tout ce calcul, il suit donc

$$\sqrt[n]{|a_1 a_2 \cdots a_n|} < (1 + \varepsilon (n)) e^{-\frac{1}{\rho} \frac{A}{B}} |a_n|,$$

et par suite, en tenant compte de l'inégalité (24), on arrive à ce résultat que, *dans l'hypothèse* (30), *la limite* (25) *peut être remplacée par la suivante*:

$$|a_n| > (1 - \varepsilon) \left[e^{\frac{A}{B}} \frac{\rho^{\alpha - 1}}{e} n (\log n)^{-\alpha} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{31}$$

ε pouvant être choisi aussi petit qu'on le voudra, à condition qu'on prenne l'indice n suffisamment grand.

L'hypothèse que nous venons d'envisager se trouve réalisée dans tous les cas où, en même temps que la condition (23), l'inégalité

$$M(r) > e^{kr^\rho (\log r)^\alpha}$$

est vérifiée pour les valeurs r dépassant une certaine limite, k désignant un nombre positif inférieur à l'unité. Il suit en effet du théorème du n° 14 qu'il est possible, dans ces conditions, de trouver un nombre positif B tel que la seconde des inégalités (30) soit vérifiée à partir d'un certain indice n, et, pour que la première de ces inégalités subsiste, nous n'avons, d'après (25), qu'à poser

$$A = (1 - \varepsilon)\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} = A_0,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Le nombre B une fois déterminé, l'inégalité (31) nous donne

$$|a_n| > \left[A_1 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

avec

$$A_1 = A_0\mu \quad \left(\mu = e^{\frac{A_0}{B}}\right).$$

Nous en concluons, en appliquant encore une fois le résultat démontré ci-dessus,

$$|a_n| > \left[A_2 n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

où

$$A_2 = (1-\varepsilon)\, e^{\frac{A_1}{B}}\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} = A_0 e^{\frac{A_0}{B}\mu} = A_0\mu^\mu.$$

On verrait de même que dans l'inégalité qui précède, on peut remplacer A_2 par la constante $A_3 = A_0\mu^{\mu^\mu}$, et ainsi de suite. Or l'expression

$$\mu^{\mu^{\cdot^{\cdot^{\mu}}}}, \tag{32}$$

lorsqu'on y fait croître indéfiniment le nombre des exposants superposés, converge vers la plus petite racine positive de l'équation $x = \mu^x$, et nous arrivons par suite au résultat que voici:

Si la condition (23) *est vérifiée, et si l'on a en même temps, à partir d'un certain indice* n,

$$|a_n| < \left[Bn(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{33}$$

B étant une constante positive, on pourra remplacer l'inégalité (25) *par la suivante:*

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\omega\frac{\rho^{\alpha-1}}{e} n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

où ω désigne la plus petite racine positive de l'équation

$$x = e^{\frac{\rho^{\alpha-1}}{Be}x}.$$

Nous avons admis sans démonstration que l'expression (32) tend vers une limite finie lorsque le nombre des exposants μ superposés augmente, et il est évident qu'il en est ainsi puisque, dans le cas contraire, notre raisonnement conduirait à une absurdité. Mais d'autre part on voit facilement que la convergence de l'expression en question n'a lieu que tant qu'on aura $\mu \leq e^{\frac{1}{e}}$, condition qui s'écrit dans le cas actuel $B \geq eA_0$, ou encore, puisque le nombre ε peut être pris arbitrairement petit, $B \geq \rho^{\alpha-1}$. Nous arrivons donc à ce résultat que, dans l'hypothèse (23), l'inégalité (33) ne saurait être vérifiée pour toutes les valeurs n dépassant une certaine limite, si l'on a $B < \rho^{\alpha-1}$; en d'autres termes:

Si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière vérifie la condition

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^\alpha} \tag{23}$$

à partir d'une certaine valeur de r, on aura pour une infinité d'indices n,

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\rho^{\alpha-1} n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{34}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

C'est là encore un résultat bien précis. Nous allons voir, en effet, qu'étant donné un nombre positif σ arbitrairement petit, on peut former une fonction entière telle qu'on ait, à partir d'un certain indice n,

$$|a_n| < \left[(1+\sigma)\rho^{\alpha-1} n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{35}$$

et qu'en même temps l'inégalité (23) subsiste pour les valeurs r suffisamment grandes.

A cet effet, considérons le produit

$$f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left\{1 + \left(\frac{x}{a(n)}\right)^k\right\}, \tag{36}$$

où

$$a(n) = \left[(1+\sigma')\rho^{\alpha-1} kn (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

σ' étant un nombre positif inférieur à σ, et k un entier positif supérieur à ρ et d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra.

On vérifie d'abord immédiatement que l'inégalité (35) a lieu à partir d'une valeur finie de n, quelque grand qu'on ait choisi l'entier k. D'autre part la formule

(*a*) de la p. 53 nous donne, en changeant α, ρ, x resp. en $-\alpha$, $\frac{\rho}{k}$, x^k, et en faisant $p=0$, $A=(1+\sigma')\,k\rho^{\alpha-1}$,

$$f(x)=e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{1+\sigma'}\frac{\pi\rho}{k}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{k}\right)}x^{\rho}(\log x)^{\alpha}}$$

Comme le produit $\frac{\pi\rho}{k}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{k}\right)}$ tend vers l'unité lorsque k tend vers l'infini, on voit donc que l'inégalité (23) subsiste à partir d'une certaine valeur de r, si l'on a pris l'entier k suffisamment grand, et que par suite la fonction (36) répond bien aux conditions requises.

30. **Suite de la discussion précédente; cas d'une fonction de genre 0 dont les zéros sont réels et de même signe.** — Considérons une fonction entière de genre zéro

$$f(x)=\prod_{n_0}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right),$$

dont les zéros sont tous réels et de même signe, p. ex. tous positifs, cas auquel on a

$$M(r)=\prod_{n_0}^{\infty}\left(1+\frac{r}{a_n}\right).$$

Dans ces conditions, on pourra encore, à l'inégalité (25), en substituer une autre qui est plus précise.

A cet effet, nous aurons d'abord à résoudre la question suivante. Posons

$$M(r)=e^{\psi(r)\,r^{\rho}(\log r)^{\alpha}};$$

on demande *quel est la plus petite valeur que puisse atteindre la limite supérieure pour* $r=\infty$ [1] *de l'expression* $\psi(r)$, *lorsque les zéros sont assujettis à la seule condition de vérifier l'inégalité*

$$a_n\leq\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

pour une infinité d'indices n (*d'ailleurs quelconques*).

n étant un indice quelconque pour lequel est vérifiée l'inégalité ci-dessus, posons

$$\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}=R,\quad\text{d'où}\quad n=\frac{\rho^{\alpha}}{A}R^{\rho}(\log R)^{\alpha}(1+\varepsilon(R)).$$

---

[1]) Pour la terminologie, *voir* J. Hadamard: *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, p. 5.

On aura évidemment, pour toutes les valeurs de r,

$$M(r) > \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{n - n_0},$$

et par suite

$$\psi(r) > (n - n_0) \frac{\log\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{r^\rho (\log r)^\alpha}.$$

En cherchant le maximum de cette dernière expression, on trouve la condition

$$\left(1 + \frac{R}{r}\right) \log\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1 + \varepsilon(r)}{\rho},$$

d'où il suit $r = \tau R (1 + \varepsilon(R))$, τ désignant la racine positive de l'équation

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \log(1 + x) = \frac{1}{\rho}. \tag{37}$$

Le maximum cherché devient donc, en tenant compte de la relation entre n et R,

$$\frac{\rho^\alpha}{A} \frac{\log(1 + \tau)}{\tau^\rho} (1 + \varepsilon(n)) = \frac{\rho^{\alpha - 1}}{A} \frac{\tau^{1 - \rho}}{1 + \tau} (1 + \varepsilon(n)),$$

et par suite nous arrivons à cette conclusion que, dans les conditions indiquées ci-dessus, la limite supérieure de $\psi(r)$ pour $r = \infty$ ne saurait être inférieure à $\frac{\rho^{\alpha - 1}}{A} \frac{\tau^{1 - \rho}}{1 + \tau}$. Mais d'autre part on voit facilement, par un raisonnement analogue à celui du n° 28, qu'on peut disposer les zéros a_n, conformément aux conditions voulues, de telle sorte qu'on ait, à partir d'une valeur finie de r,

$$\psi(r) < (1 + \varepsilon) \frac{\rho^{\alpha - 1}}{A} \frac{\tau^{1 - \rho}}{1 + \tau},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Donc *la plus petite valeur que puisse acquérir la limite supérieure pour* $r = \infty$ *de l'expression* $\psi(r)$ *est précisément égale à* $\frac{\rho^{\alpha - 1}}{A} \frac{\tau^{1 - \rho}}{1 + \tau}$.

De ce résultat nous pouvons conclure immédiatement la proposition suivante:

Étant donnée une fonction entière de genre 0 *dont le module maximum vérifie l'inégalité*

$$M(r) < e^{r^\rho (\log r)^\alpha}$$

à partir d'une certaine valeur de r, *si l'on sait que les zéros de cette fonction sont tous réels et de même signe, on aura pour* n *suffisamment grand, quelque petit que soit le nombre positif* ε,

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\rho^{\alpha-1}\frac{\tau^{1-\rho}}{1+\tau}\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{38}$$

τ désignant la racine positive de l'équation (37).

Il suit d'ailleurs de notre raisonnement que l'inégalité (38) est la plus précise qu'on puisse établir dans les conditions que nous venons d'indiquer.

On passe de l'inégalité (25) à l'inégalité (38) en remplaçant, à l'intérieur de la parenthèse, le facteur $\frac{1}{e}$ par l'expression $\frac{\tau^{1-\rho}}{1+\tau}$. Une discussion facile montre que cette expression croît en même temps que ρ, et qu'elle tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque ρ tend vers 0 et vers *l'unité* lorsque ρ tend vers 1, de sorte qu'elle est bien toujours supérieure à $\frac{1}{e}$. Ainsi, pour $\rho = 1$, l'inégalité (38) s'écrit simplement

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Pour $\rho = \frac{1}{2}$, on trouve $\frac{\tau^{1-\rho}}{1+\tau} = \frac{1}{2,4862\ldots}$.

31. **Résumé des résultats précédents; application à la fonction $\xi(t)$ de Riemann. — Influence des arguments des zéros sur la croissance de la fonction.** — Soit une fonction entière dont le module maximum est d'ordre $e^{A r^{\rho}(\log r)^{\alpha}}$ en ce sens qu'on a, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$M(r) < e^{(A+\varepsilon) r^{\rho}(\log r)^{\alpha}} \quad \text{à partir d'une valeur finie de } r,$$

et d'autre part

$$M(r) > e^{(A-\varepsilon) r^{\rho}(\log r)^{\alpha}} \quad \text{pour des valeurs } r \text{ indéfiniment croissantes.}$$

Dans ces conditions on aura d'abord:

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho^{\alpha-1}}{A e}\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{à partir d'un certain indice } n,$$

d'après l'inégalité générale fournie par le théorème de M. Jensen, (*v.* n° 28), et

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho^{\alpha-1}}{A}\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour une infinité d'indices } n,$$

d'après le théorème de la p. 68.

D'autre part, si ρ n'est pas entier, on pourra trouver une constante positive λ telle qu'on ait, quelque petit que soit ε,

$$|a_n| < (1+\varepsilon)\left[\frac{\lambda}{A}\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour une infinité d'indices } n,$$

et le raisonnement du n° 27 prouve que la plus petite valeur qu'on puisse donner à λ, lorsqu'on exige que ce résultat subsiste pour toute fonction qui vérifie les conditions énoncées ci-dessus, est

$$\lambda = \rho^{\alpha-1}\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} \quad \text{pour} \quad 0<\rho<1,$$

et

$$\lambda = \frac{\rho^{\alpha-1}}{2^{\rho-2}}\left\{\frac{\rho}{2-\rho}+\frac{\rho}{\rho-1}F(1,1,\rho,-1)\right\} \quad \text{pour} \quad 1<\rho<2.$$

Lorsque ρ est entier et α différent de zéro, la dernière inégalité ci-dessus sera remplacée par une autre de la forme

$$|a_n|<(1+\varepsilon)\left[\frac{\mu}{A}n(\log n)^{-\alpha+1}\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour une infinité d'indices } n,$$

μ étant une constante positive à laquelle on pourra donner la valeur

$$\mu=\frac{\rho^{\alpha-1}}{|\alpha|}.$$

En fait, nous n'avons démontré ce résultat que pour $\rho=1$, et pour $\rho=2, \alpha<0$; mais il est probable qu'il est général.

Soit comme exemple la fonction de RIEMANN:

$$\xi(t)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \qquad \left(s=\frac{1}{2}+it\right).$$

On sait que c'est une fonction entière et une fonction paire de t. Soient $t=\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2, \cdots, \pm\alpha_n, \cdots$ ses zéros, rangés par ordre de modules croissants.

En remarquant que la fonction $\zeta(s)$ tend vers l'unité lorsque la partie réelle de s augmente indéfiniment et qu'elle croît moins vite qu'une certaine puissance de s dans toute bande parallèle à l'axe imaginaire, et en appliquant au facteur $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ la formule de STIRLING, on trouve que le module maximum de $\xi(t)$ peut se mettre sous la forme

$$e^{\frac{1+\varepsilon(|t|)}{2}|t|\log|t|}.$$

Posons $\xi(t)=F(t^2)$, $t^2=x$, $|x|=r$. La fonction entière $F(x)$ aura pour zéros les points $x=\alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots, \alpha_n^2, \cdots$, et son module maximum s'écrira

$$M(r)=e^{\frac{1+\varepsilon(r)}{4}\sqrt{r}\log r}. \tag{39}$$

Dès lors, en faisant dans les inégalités écrites plus haut $A=\frac{1}{4}$, $\rho=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$, nous trouvons:

$$|\alpha_n| > (1-\varepsilon)\frac{4}{e}\frac{n}{\log n} \qquad \text{à partir d'un certain indice } n;$$

$$|\alpha_n| > (1-\varepsilon)\,4\,\frac{n}{\log n} \qquad \text{pour une infinité d'indices } n;$$

$$|\alpha_n| < (1+\varepsilon)\,2\pi\frac{n}{\log n} \qquad \text{pour une infinité d'indices } n.$$

En tenant compte de ce que les parties imaginaires des zéros α_ν sont toutes comprises entre des limites finies $\left(-\frac{i}{2}\text{ et }+\frac{i}{2}\right)$, on conclut d'ailleurs facilement du résultat du n° 30 que, dans la première des inégalités précédentes, on peut remplacer le facteur numérique $\frac{4}{e}$ par $\frac{4}{2,4852\ldots}$.

Enfin, le théorème du n° 14 permet de conclure de l'égalité (39) que le rapport $|\alpha_n| : \frac{n}{\log n}$ reste inférieur à une quantité finie lorsque n augmente.

On peut présenter les résultats rappelés plus haut sous une autre forme, qui met en évidence l'influence qu'exercent les arguments des zéros d'une fonction entière sur la croissance de son module maximum.

Fixons les modules des zéros d'une fonction canonique de telle sorte qu'on ait

$$|a_n| = (1+\varepsilon(n))\left[n(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}; \tag{40}$$

il s'agit de trouver, pour le module maximum de cette fonction, des limites supérieure et inférieure qui soient valables de quelque manière qu'on dispose les arguments des zéros, et qui soient en même temps aussi précises que possible.

Il suit d'abord du n° 27 qu'on aura

$$M(r) < e^{(1+\varepsilon(r))\,\lambda\, r^\rho (\log r)^\alpha} \qquad \text{si } \rho \text{ n'est pas entier,}$$

λ ayant la même signification qu'à la p. 72, et

$$M(r) < e^{(1+\varepsilon(r))\,\mu' r^\rho (\log r)^{\alpha+1}} \qquad \text{si } \rho \text{ est entier,}$$

μ' étant égal à $\frac{\rho^\alpha}{|\alpha+1|}$ (au moins si $\rho=1$ ou $\rho=2$, $\alpha<-1$), et que ces limites sont les plus précises q'on puisse assigner.

D'autre part je dis qu'on aura, quelque petit que soit ε,

$$M(r) > e^{(1-\varepsilon)\rho^{\alpha-1} r^{\rho} (\log r)^{\alpha}} \tag{41}$$

pour les valeurs suffisamment grandes de r.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre positif σ tel qu'on eût, pour une infinité de valeurs r indéfiniment croissantes,

$$M(r) < e^{(1-\sigma)\rho^{\alpha-1} r^{\rho} (\log r)^{\alpha}}.$$

Or, si l'on suppose réalisée cette dernière hypothèse, on est conduit, par un raisonnement analogue à celui de la p. 30, à ce résultat que l'inégalité

$$\sqrt[n]{|a_1 a_2 \cdots a_n|} > (1-\varepsilon)\left[\frac{1}{e(1-\sigma)} n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

a lieu pour une infinité d'indices n, et comme dans le cas actuel les conditions (30) du n° 29 sont vérifiées à partir d'une certaine valeur de n, lorsqu'on y fait $A = 1-\varepsilon$, $B = 1+\varepsilon$, on peut en conclure, d'après le calcul de la p. 66, que l'inégalité

$$|a_n| > \left[\frac{1-\varepsilon}{1-\sigma} n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

subsiste pour une infinité d'indices n, quelque petit que soit ε.

Cette conclusion étant en contradiction avec l'hypothèse (40), notre proposition est donc exacte. L'exemple de la p. 68 montre d'ailleurs que la limite (41) est bien précise.

32. **Aperçus sur un problème important relatif aux fonctions à croissance régulière.** — Soit une fonction entière dont le module maximum peut se mettre sous la forme

$$M(r) = e^{(1+\varepsilon(r))\, A r^{\rho} (\log r)^{\alpha}}, \tag{42}$$

ρ étant un nombre positif *non entier*, et $\varepsilon(r)$ désignant, comme toujours, une quantité qui tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

Le théorème du n° 14 nous apprend que, dans ces conditions, la valeur du rapport

$$|a_n| : \left[n (\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{43}$$

demeure comprise entre deux limites finies et positives, à partir d'un certain indice n. Mais il reste à calculer effectivement ces limites et à les resserrer autant que possible. En termes plus précis, on peut se proposer de trouver le plus petit

nombre positif σ tel que, pour *toute* fonction entière dont le module maximum peut se mettre sous la forme (42), l'inégalité

$$|a_n| < (1+\varepsilon)\left[\frac{\sigma}{A}\, n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{44}$$

soit vérifiée à partir d'une valeur finie de n, quelque petit que soit le nombre positif ε; et un problème analogue se pose relativement à la limite inférieure du rapport (43).

Le peu de temps que nous avons pu y consacrer, ne nous a pas permis de trouver la solution définitive de ces questions, qui semblent d'ailleurs présenter des difficultés considérables. Aussi nous bornerons nous ici à quelques remarques sommaires, servant à préciser les calculs et les raisonnements du n° 14, auxquels nous renvoyons le lecteur.

Nous ferons d'abord observer qu'en vertu du théorème de la p. 67, on peut conclure de (44) cette autre inégalité:

$$|a_n| > (1-\varepsilon)\left[\omega^{\rho\alpha-1}\frac{}{Ae}\, n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

qui sera également vérifiée à partir d'une valeur finie de n, quelque petit que soit ε, et où ω désigne la plus petite racine positive de l'équation

$$x = e^{\frac{\rho\alpha-1}{\sigma e}x}.$$

D'autre part, lorsque le genre de la fonction donnée est égal à *zéro* ou à *un*, les résultats des n^{os} 26 et 27 permettront de préciser les limites supérieures adoptées au n° 14 pour les différents produits qu'on a été amené à y envisager (*v.* la première formule de la p. 32).

Ainsi, dans le cas du genre *zéro*, on est conduit à chercher des expressions asymptotiques, pour les grandes valeurs de n', des produits

$$\prod_{n_0}^{n'}\left\{1+\frac{x}{\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right\} \quad \text{et} \quad \prod_{n'}^{\infty}\left\{1+\frac{x}{\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right\},$$

où A désigne une constante positive et où la variable x prend des valeurs réelles et positives du même ordre de grandeur que la quantité

$$R \equiv \left[A\,n'\,(\log n')^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}},$$

de sorte que le rapport $\tau \equiv \frac{x}{R}$ reste fini.

Afin d'évaluer le premier de ces produits, considérons l'expression

$$F(y)=\prod_{n_0}^{n''}\left\{1+\frac{y}{a(n)}\right\} \qquad \left(a(n)\equiv\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}\right),$$

où l'entier n'', pour une valeur donnée quelconque de y, se détermine par les inégalités $a(n'')\leq\frac{y}{\tau}<a(n''+1)$, et faisons croître y d'une manière continue depuis la valeur $y_0=\tau a(n_0)$ jusqu'à la valeur donnée de x. L'expression $\log F(y)$ ira constamment en croissant et augmentera brusquement de la quantité $\log(1+\tau)$ chaque fois que $\frac{y}{\tau}$ passera par une valeur $a(n)$. Donc le logarithme du produit en question pourra se mettre sous la forme:

$$(n'-n_0+1)\log(1+\tau)+\int_{y_0}^{x}\frac{F'(y)}{F(y)}\,dy\,.$$

Or le calcul du n° 21 nous donne

$$\frac{F'(y)}{F(y)}=(1+\varepsilon(y))\frac{\rho^{\alpha+1}}{A}\int_{\frac{y_0}{\tau}}^{\frac{y}{\tau}}t^{\rho-1}(\log t)^{\alpha}\frac{dt}{t+y},$$

et, d'après la formule (15) de la p. 58, cette dernière expression est égale à

$$\frac{\rho^{\alpha}}{A}\frac{\tau^{1-\rho}}{1+\tau}F\left(1,\,1,\,\rho+1,\,\frac{1}{1+\tau}\right)y^{\rho-1}(\log y)^{\alpha}(1+\varepsilon(y))\,.$$

Comme d'ailleurs

$$n'=\frac{\rho^{\alpha}}{A}R^{\rho}(\log R)^{\alpha}(1+\varepsilon(R))\,,$$

nous obtenons donc, en réunissant tous ces résultats, la formule asymptotique suivante:

$$\log\prod_{n_0}^{n'}\left\{1+\frac{x}{\left[A\,n\,(\log n)^{-\alpha}\right]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}$$

$$=\frac{\rho^{\alpha-1}}{A}\left\{\rho\log(1+\tau)+\frac{\tau}{1+\tau}F\left(1,\,1,\,\rho+1,\,\frac{1}{1+\tau}\right)\right\}R^{\rho}(\log R)^{\alpha}(1+\varepsilon(R)),$$

où τ et R ont la même signification que ci-dessus.

En se servant de la formule (*a*) du n° 24, on peut tirer aussi du résultat que nous venons d'établir une expression asymptotique pour le second des produits envisagés plus haut.

33. **Remarque sur le genre de la somme de deux fonctions entières. — Conclusions générales.** — Dès l'introduction de la notion du genre d'une fonction entière, on a été conduit tout naturellement à se demander si cette notion se conserve dans la différentiation et dans l'addition, ou, en termes plus précis si les théorèmes suivants sont vrais dans tous les cas:

La dérivée d'une fonction entière de genre p est elle-même de genre p.

La somme de deux fonctions entières de genre p ne saurait être de genre supérieur à p.

LAGUERRE a démontré le premier de ces théorèmes en supposant que la fonction donnée n'admet qu'un nombre limité de racines imaginaires [1]). Mais pour le cas général, on ne possède aucune démonstration.

En ce qui concerne le second théorème. les résultats de M HADAMARD et la proposition que nous avons établie p. 47 permettent d'affirmer qu'il est exact dans des cas très étendus. Mais en fait ce théorème souffre des exceptions, et c'est ce que nous allons montrer sur un exemple particulier aussi simple que possible, dont on aperçoit d'ailleurs des généralisations immédiates.

Soit la fonction de genre *zéro*:

$$f(x) = \prod_{n_0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n (\log n)^{\alpha}}\right), \tag{45}$$

où $1 < \alpha < 2$. Nous allons faire voir que *la somme* $f(x) + f(-x)$ *est de genre* un [2]).

Désignons par $\pm a_1, \pm a_2, \cdots, \pm a_n, \cdots$ les zéros de la fonction $f(x) + f(-x)$. rangés par ordre de modules croissants, et écrivons

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x^2);$$

$\varphi(x)$ sera une fonction entière admettant les zéros $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Cela posé, en nous bornant désormais aux valeurs réelles et positives de la variable x, nous trouvons, d'après la formule (b) du n° 24,

$$f(x) = e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{\alpha-1} x (\log x)^{-\alpha+1}},$$

---

[1]) *Comptes rendus*, t. XCVIII; 1884; *Oeuvres complètes*, t. I, p. 178. *Voir* aussi: É. BOREL: *Leçons sur les fonctions entières*, Chapitre II.

[2]) Ce dernier point et quelques-uns des théorèmes généraux établis dans le cours de ce travail ont fait l'objet d'une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* du 30 décembre 1901. A la suite de cette communication, M. PIERRE BOUTROUX a fait connaître, dans des Notes successives (*Comptes rendus*, 1902, nos 2, 3 et 9) des résultats nouveaux très intéressants auxquels il est arrivé dans ses recherches sur les fonctions entières, et dont quelques-uns ont rapport à la question traitée ci-dessus.

et d'autre part, par une discussion tout élémentaire,

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(-x)}{f(x)} = 0,$$

de sorte qu'on aura également

$$f(x) + f(-x) = e^{\frac{1+\varepsilon(x)}{\alpha-1} x (\log x)^{-\alpha+1}}$$

Le module maximum de la fonction $\varphi(x)$, lequel est atteint pour les valeurs positives de x, peut donc se mettre sous la forme

$$M(r) = e^{(1+\varepsilon(r))\frac{2^{\alpha-1}}{\alpha-1} r (\log r)^{-\alpha+1}},$$

et par suite nous pouvons conclure du théorème du n° 14 que le rapport

$$|b_n| : \left[n (\log n)^{\alpha-1}\right]^2$$

reste compris entre deux limites finies et positives, quel que soit n.

Comme $\alpha - 1 < 1$, la série $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ est donc divergente, et par conséquent le genre de la somme $f(x) + f(-x)$ est bien égal à *un*, comme nous l'avions avancé.

L'exemple que nous venons de traiter conduit encore à des conséquences intéressantes relatives au problème de la détermination du genre d'une fonction entière définie par une série donnée.

Soit en effet

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$$

le développement de TAYLOR de la fonction (45); on aura, d'après le dernier théorème de la p. 45, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$\sqrt[n]{c} < \frac{e}{\alpha-1} \frac{1+\varepsilon}{n (\log n)^{\alpha-1}}$$

à partir d'une valeur finie de n, et d'autre part

$$\sqrt[n]{c_n} > \frac{e}{\alpha-1} \frac{1-\varepsilon}{n (\log n)^{\alpha-1}}$$

pour une infinité d'indices n. Mais à cause de la distribution régulière des zéros de la fonction considérée, on peut présumer que la seconde de ces inégalités subsiste, comme la première, à partir d'une valeur finie de n, de sorte qu'on pourra écrire simplement

$$\sqrt[n]{c_n} = \frac{e}{\alpha - 1} \frac{1 + \varepsilon(n)}{n (\log n)^{\alpha - 1}}. \tag{46}$$

En admettant cette conclusion, dont l'exactitude n'est pas douteuse, mais dont il ne semble pas aisé de trouver une démonstration directe, on voit d'abord que, *bien que la fonction donnée soit du genre zéro, la série* $\sum_0^\infty \sqrt[n]{c_n}$ *n'en est pas moins divergente.* C'est là un exemple du fait que nous avions annoncé (d'ailleurs en des termes un peu trop affirmatifs) à la fin de la première partie de ce Mémoire.

D'autre part nous ferons observer que la formule (46) convient également aux coefficients de certaines fonctions de genre *un*, p. ex. $(1 + x)\left[f(x) + f(-x)\right]$. On voit donc que, *dans certains cas, le genre d'une fonction définie par une série donnée dépend, non pas de l'ordre de grandeur des coefficients de cette série, mais de leurs propriétés analytiques.*

Cette remarque est propre à montrer les difficultés que peut présenter le problème en question, puisqu'il en résulte qu'on est réduit, dans certains cas, à la recherche directe des zéros de la série donnée.

Quel est p. ex. le genre de la fonction (55) envisagée à la p. 44? Il nous semble bien probable qu'il soit le même que pour les fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{p n \log (p n)} \right)^{p n} \quad (p = \text{un entier quelconque} > 1),$$

c'est à dire égal à *un*. Il y aurait un certain intérêt théorique à le démontrer directement, puisqu'on aurait alors un exemple où la série (59) de la p. 48 converge, bien que la fonction donnée (56) soit du genre ρ. Mais la démonstration ne doit pas être facile à trouver.

De la remarque faite ci dessus, il résulte encore que la question de savoir si le genre de la dérivée d'une fonction entière est *dans tous les cas* égal à celui de la fonction elle-même, et bien d'autres questions analogues qu'on peut se poser dans cette théorie, échappent complètement aux considérations où n'intervient que l'ordre de grandeur du module maximum d'une fonction entière ou l'ordre de grandeur des coefficients de son développement de Taylor.

Pressboard
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros., Inc.
Makers
Syracuse, N. Y
PAT. JAN. 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 001755492